ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXI 1985 3

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

З. А. Арушанян

Приведение к каноническому виду ОКР-систем с квадратными матричными коэффициентами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 28/II 1984)

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=B_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\ldots+B_n\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} \tag{1}$$

с вещественными матричными коэффициентами B_j порядка $(k\times k)$ и с выделенной переменной $t\in R^1$ в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$.

Определение 1. а) *Пару чисел* (n, k) *назовем типом системы* (1), *где* n *указывает количество, а* k — *порядок матриц* $B_j (j=1, 2, \ldots, n)$.

б) *Систему* (1) *назовем обобщенной системой Коши—Римана или кратко ОКР-системой, если любое ее решение* Φ *состоит из гармонических компонент, (см.* ([1]), *с.* 358).

в) *Через* $Z_{(n,k)}$ *будем обозначать множество систем матриц* $\beta=\{B_1, B_2, \ldots, B\}$ *таких, что* $\beta\in Z_{(n,k)}\Leftrightarrow$, *когда система* (1) *с коэффициентами* β *есть ОКР-система типа* (n, k).

Основная теорема.

1) $\forall n Z_{(n,k)}\neq\varnothing\Leftrightarrow k=p\cdot 2^n$ (*p—натуральное число*).

2) *Если* $J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$; $I_{2'}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, *то* $\varepsilon_1\equiv\{J\}\in Z_{(1,2')}\Rightarrow\varepsilon_2\equiv\left\{\begin{pmatrix}J&0\\0&-J\end{pmatrix},\right.$ $\left.\begin{pmatrix}0&-I_{2'}\\I_{2'}&0\end{pmatrix}\right\}\in Z_{(2,2^2)}\Rightarrow\ldots\Rightarrow\varepsilon_n\equiv\{J_1, \ldots, J_n\}\in Z_{(n,2^n)}\Rightarrow\varepsilon_{n+1}\equiv\left\{\begin{pmatrix}J_1&0\\0&-J_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}J_n&0\\0&-J_n\end{pmatrix},\right.$ $\left.\begin{pmatrix}0&-I_{2^n}\\I_{2^n}&0\end{pmatrix}\right\}\in Z_{(n+1,2^{n+1})}\Rightarrow\ldots$, *где* I_{2^n}—*единичная матрица порядка* 2^n.

$2)^{(p)}$ $\varepsilon_n^{(p)}\equiv\{J_1^{(p)}, \ldots, J_n^{(p)}\}\in Z_{(n,p\cdot 2^n)}$, *где* $\varepsilon_n^{(1)}\equiv\varepsilon_n$, *а* $J_j^{(p)}=\mathrm{diag}(J_j, \ldots, J_j)$ (*p—раз*) $\forall j=1, 2, \ldots, n$.

3) $\beta\in Z_{(n,p\cdot 2^n)}\Leftrightarrow\beta=T^{-1}\varepsilon_n^{(p)}T$ *для некоторой обратимой матрицы* $T=T(\beta)$.

Следствие из теоремы. Любое решение Φ ОКР-системы с коэффициентами $\beta=\{B_1, \ldots, B_n\}\in Z_{(n,p\cdot 2^n)}$ можно представить в виде $\Phi=T^{-1}\cdot F$, где F—решение канонической ОКР-системы с коэффициентами $\varepsilon_n^{(p)}=\{J_1^{(p)}, \ldots, J_n^{(p)}\}\in Z_{(n,p\cdot 2^n)}$, а $T=T(\beta)$—обратимая матрица, не зависящая от Φ.

2. Формулировка и доказательство основных лемм.

Лемма 1. $\beta=\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}\in Z_{(n,k)}\Leftrightarrow$, *когда*

$$B_s^2=-I \text{ (}I\text{—единичная матрица) } \forall s=1, 2, \ldots, n; \tag{2}$$

$$B_iB_j=-B_jB_i\forall i\neq j. \tag{3}$$

Доказательство. Для любого вектора $c\in R^k$ положим

$$F_{ij}(x, t)=\left\{x_ix_jI+(x_iB_j+x_jB_i)t+(B_iB_j+B_jB_i)\frac{t^2}{2}\right\}\cdot c.$$

Легко проверить, что вектор-функция F_{ij}—это решение ОКР-системы с коэффициентами $\beta=\{B_1, \ldots, B_n\}\in Z_{(n,k)}$. Следовательно, $\Delta F_{ij}=0$ $\forall c\in \in R^k$ и $i, j=1, 2, \ldots$, т. е.

$$\Delta F_{s,s}=2(B_s^2+I)c=0, \text{ когда } i\equiv j=s,$$

$$\Delta F_{i,j}=(B_iB_j+B_jB_i)c=0, \text{ когда } i\neq j,$$

для всех $c\in R^k$. Отсюда следуют соотношения (2) и (3).

Обратно, если F—решение системы уравнений с коэффициентами $\{B_1, \ldots, B_n\}$, которые удовлетворяют (2) и (3), то

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}F=\left(\sum_1^n B_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2F=\left(-\sum_1^n\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)F.$$

Таким образом, $F''_{t^2}+\sum\limits_1^n F''_{x_j^2}=0$, т. е. $\Delta F=0$. Значит, система уравнений с коэффициентами $\beta=\{B_1, \ldots, B_n\}$ есть ОКР-система и по определению $\beta\in Z_{(n,k)}$.

Лемма 2. *Пусть* $\bar\beta=\{\bar B_1, \ldots, \bar B_n\}$, *где* $\bar B_j: R^k\to R^k$*—линейные преобразования евклидова пространства* R^k, *и координаты оператора* $\bar\beta$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\bar B_s^2=-\bar I \ (s=1, 2, \ldots, n) \text{ (}\bar I\text{—тождественное преобразование)} \tag{$\bar 2$}$$

$$\bar B_i\bar B_j=-\bar B_j\bar B_i \quad \forall i\neq j. \tag{$\bar 3$}$$

$\forall e_1\in R^k(e_1\neq 0)$ *по определению положим*

$$\begin{array}{llll} \bar B_1e_1=e_2, & \bar B_2e_1=e_3, & \bar B_3e_1=e_5, & \bar B_ne_1=e_{2^{n-1}+1} \\ & \bar B_2e_2=e_4, & \bar B_3e_2=e_6, \quad \cdots & \bar B_ne_2=e_{2^{n-1}+2} \\ & & \quad\cdots & \\ & & \bar B_3e_3=e_7, \quad \cdots & \\ & & \bar B_3e_4=e_8, & \quad\cdots \\ & & & \quad\cdots \\ & & & \quad\cdots \\ & & & \bar B_ne_{2^{n-1}}=e_{2^n}. \end{array} \tag{4}$$

Тогда: 1) *Система векторов* $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2^n}\}$ *линейно независима в* R^k.

2) *Если* Q*—подпространство, натянутое на векторы* $\{e_1, \ldots, e_{2^n}\}$, *то* $\bar B_j$ *взаимнооднозначное отображение на подпространство* $Q\subset R^k$ *для всех* $j=1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Из определения системы векторов (см. (4)) легко увидеть, что соотношение линейной зависимости

$$\sum_{s=1}^{2^n} \alpha_s e_s = 0 \tag{5}$$

равносильно соотношению

$$\lambda_0 \overline{I} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_s \leqslant n} \lambda_{(l_1, l_2, \ldots, l_s)} \overline{B}_{l_1} \overline{B}_{l_2} \ldots \overline{B}_{l_s} = 0, \tag{6}$$

где количество коэффициентов $\lambda_{(l_1, l_2, \ldots, l_s)}$ в (6) равно $1+C_n^1+C_n^2+\ldots+$ $+C_n^n=2^n$ и они могут отличаться от коэффициентов α_s в (5) лишь только знаками. Но размерность клиффордовой алгебры, порожденной элементами $\{\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_n\}$, удовлетворяющими соотношениям $(\overline{2})$ и $(\overline{3})$, как линейного пространства, равна 2^n и соотношение линейной зависимости между базисными элементами дается как раз соотношением (6). Следовательно, равенство нулю левой части соотношения (5) может иметь место только при $\alpha_s=0$ $\forall s$.

Чтобы убедиться в справедливости утверждения 2) леммы, заметим, что из равенств $\overline{B}_n e_j = e_{2^{n-1}+j}$ $(j=1, 2, \ldots, 2^{n-1})$ (см. последний столбец в (4)) следует, что $\overline{B}_n e_{2^{n+1}+j} = \overline{B}_n^2 e_j = -e_j$ (см. (2)). Значит, $\overline{B}_n$—взаимнооднозначное отображение на Q. По индукции устанавливается, что и остальные операторы $\overline{B}_{n-1}, \ldots, \overline{B}_1$ обладают этим свойством.

Лемма 3. $Z_{(n, k)} \neq \varnothing \Rightarrow k = p \cdot 2^n$ (*p—натуральное число*).

Доказательство. $Z_{(n, n)} \neq \varnothing \Rightarrow \exists \beta = \{B_1, \ldots, B_n\} \in Z_{(n, k)}$. Пусть R^k—k-мерное евклидово пространство с произвольным базисом, а $\overline{\beta}=\{\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_n\}$—линейное преобразование, имеющее матрицу $\beta=$ $=\{B_1, \ldots, B_n\}$ в этом базисе. По лемме 1, система матриц $\{B_1, \ldots,$ $B_n\}$ удовлетворяет соотношениям (2) и (3), значит, координаты $\overline{\beta}$ удовлетворяют $(\overline{2})$ и $(\overline{3})$. Тогда из пункта 2) леммы 2 следует, что $\exists$ линейно-независимая система векторов $\{e_1, \ldots, e_{2^n}\}$ (2^n штук) в R^k. Следовательно, или $R^k \equiv Q$, или $R^k \supset Q$ $(R^k \neq Q)$.

В первом случае $k=2^n$, и лемма доказана, причем $p=1$.

Во втором случае $\exists e_1^{(2)} \in R^k \setminus Q (e_1^{(2)} \neq 0)$, и система операторов $\{\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_n\}$ (по аналогии с (4)) порождает систему линейно-независимых векторов $\{e_1^{(2)}, \ldots, e_{2^n}^{(2)}\}$ (2^n штук) в R^k, и ясно, что подпространство Q_2, натянутое на эти векторы, не пересекается с подпространством $Q_1 \equiv Q$. Продолжая этот процесс, мы построим последовательность попарно-непересекающихся подпространств $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, \ldots$ из R^k таких, что $R^k = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \ldots \oplus Q_p$ для некоторого p. Значит, $k=$ $=p \cdot 2^n$.

3. Доказательство основной теоремы.

Утверждения 2) и $2)^{(p)}$ теоремы являются непосредственными следствиями леммы 1. Справедливость утверждения 1) в одном направлении является содержанием леммы 3, а в другом направлении-содержанием пункта $2)^{(p)}$ основной теоремы.

Перейдем к доказательству пункта 3). Как уже было замечено при доказательстве лемм 2 и 3, для любого элемента $\beta \in Z_{(n, p \cdot 2^n)}$ можно построить базис $\{e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{2^n}^{(1)}, e_1^{(2)}, \ldots, e_{2^n}^{(2)}, \ldots, e_1^{(p)}, \ldots, e_{2^n}^{(2)}\}$ такой, чтобы преобразование β имело одну и ту же матрицу β_0. Значит, существует обратимая матрица T_1 порядка $p \cdot 2^n$ такая, что $\beta = T_1^{-1}\beta_0 T_1$. Так как, в частности, $\varepsilon_n^{(p)} \in Z_{(n, p \cdot 2^n)}$, то $\varepsilon_n^{(p)} = T_2^{-1}\beta_0 T_2$, откуда следует, что $\beta = T^{-1}\varepsilon_n^{(p)} T$.

Ереванский государственный университет

Ջ. Ա. ԱՌՈՒՇԱՆՅԱՆ

Քառակուսի մատրիցային գործակիցներով համակարգերի բերումը կանոնական տեսքի

Այս աշխատանքը նվիրված է առաջին աստիճանի դիֆերենցիալ հավասարումների, այսպես կոչված, Կոշի—Ռիմանի ընդհանրացված համակարգերի մի դասի լրիվ նկարագրությանը։ Մասնավորապես կառուցվում է մի «կանոնական սիստեմ» և ցույց է տրվում, որ յուրաքանչյուր այլ համակարգ նման է դրան։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И Стейн, Г. Вейс,* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Мир, М., 1974.