ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXI 1985 2

УДК [514.112.3:514.757]:519.212.3

МАТЕМАТИКА

В. К. Оганян

О формах треугольников, образованных точками пуассоновского процесса на плоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 13/II 1984)

В задачах статистического исследования форм случайных треугольников (шейпов), образованных точками реализаций точечных процессов на плоскости, требуется иметь подходящие стандартные распределения вероятностей в пространстве шейпов. Одно такое распределение предложено в [1]. Его можно использовать при проверке статистической гипотезы о том, что наблюдаемые шейпы соответствуют шейпам пуассоновского точечного процесса, управляемого плоской мерой Лебега. Это распределение получаем при факторизации меры $dQ_1 \cdot dQ_2 \cdot dQ_3$ (dQ_i—плоские меры Лебега, $i=1, 2, 3$) с выделением кинематической меры dK и меры $h^3 \cdot dh$ в пространстве периметров:

$$dQ_1 \cdot dQ_2 \cdot dQ_3 = dK \cdot h^3 \cdot dh \cdot d\sigma,$$

где $d\sigma$ некоторая мера в пространстве шейпов.

Обозначим через ξ_i, $i=1, 2, 3$, внутренние углы треугольника. Зафиксируем отрезок τ и через его концы проведем две прямые под углами x и y. За исключением случая параллельных прямых эта конструкция определяет треугольник. Имеем (рис. 1)

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = y, \quad \text{если } x+y<\pi;$$

$$\xi_1 = \pi - x, \quad \xi_2 = \pi - y, \text{ если } x+y>\pi.$$

Форма треугольника задается с помощью углов x и y, а пространство шейпов Ω можно отождествить с квадратом $[0, \pi]\times[0, \pi]$.

В [1] показано, что элемент меры $d\sigma$ имеет вид

$$d\sigma = \frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)}{(\sin x + \sin y + \sin(x+y))^4} dx \cdot dy. \tag{1}$$

В работе [2] была поставлена задача нахождения совместной интегральной функции распределения углов ξ_1, ξ_2, ξ_3, соответствующая плотности (1). Отметим также, что мера (1) рассматривалась в работе [3], где было найдено значение ее интеграла по всему пространству Ω: $\sigma(\Omega) = \frac{\pi}{21}$.

Основной целью настоящей заметки является нахождение совместного распределения ξ_1, ξ_2, ξ_3 углов случайного треугольника (см. формулу (2)). В частности, выписаны распределения минимального, максимального углов, одномерное маргинальное распределение, для последнего проверено, что $M\xi_i=\frac{\pi}{3}$, $i=1, 2, 3$. (M — знак математического ожидания). В конце заметки приводятся численные значения распределений $P(\xi_i>x)$, $P(\min\limits_{i=1,2,3}\xi_i>x)$ $P(\max\limits_{i=1,2,3}\xi_i<x)$.

Аналогичная задача для другой меры на Ω рассматривалась в ([4]).

Определим вероятность P в пространстве Ω с помощью соотношения $dP=\frac{21}{\pi}d\sigma$. Найдем совместное распределение углов треугольника. Обозначим через $\xi_i>a_i$ событие, состоящее в том, что i-тый угол больше a_i, $i=1, 2, 3$. Легко убедиться, что

$$P(\xi_1>a_1\cap\xi_2>a_2\cap\xi_3>a_3)=\frac{42}{\pi}\int\limits_{a_2}^{\pi-a_1-a_3}dy\int\limits_{a_1}^{\pi-y-a_3}\frac{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)}{(\sin x+\sin y+\sin(x+y))^4}dx$$

(область интегрирования показана на рис. 2).

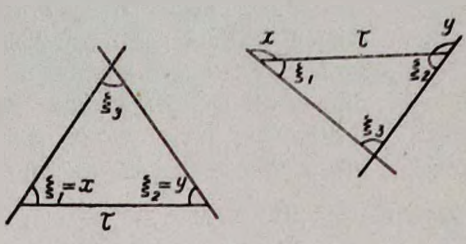

Рис. 1

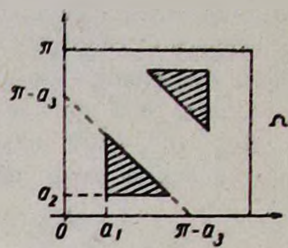

Рис. 2

Этот интеграл можно посчитать с помощью следующего преобразования подынтегральной функции

$$\frac{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)}{(\sin x+\sin y+\sin(x+y))^4}=\frac{1}{32}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)^2\cdot\operatorname{tg}\frac{y}{2}\times$$

$$\times\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\right)^2\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)^3}$$

и заменой переменной $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=u$.

Получаем

$$P(\xi_1>a_1\cap\xi_2>a_2\cap\xi_3>a_3)=\frac{21}{4\cdot\pi}\int\limits_{\operatorname{tg}\frac{a_2}{2}}^{\operatorname{Ctg}\frac{a_1+a_3}{2}}u(1+u^2)du\cdot\int\limits_{\operatorname{tg}\frac{a_1}{2}}^{\frac{1-u\cdot\operatorname{tg}\frac{a_3}{2}}{u+\operatorname{tg}\frac{a_3}{2}}}z(1+z^2)\cdot\frac{1-u\cdot z}{(u+z)^3}dz.$$

Во внутреннем интеграле интегрируется дробно-рациональная функция от z, ее первообразная легко находится. После подстановки пределов интегрирования мы получаем снова дробно-рациональные функции от u, а также интеграл вида $\int P(u)\cdot\ln\frac{\left(u+\operatorname{tg}\frac{a_1}{2}\right)\left(u+\operatorname{tg}\frac{a_2}{2}\right)}{1+u^2}du$, где $P(u)$—многочлен 6-ой степени от u. Последний интеграл вычисляется с помощью интегрирования по частям.

Результат имеет вид:

$$P(\xi_1>a_1\cap\xi_2>a_2\cap\xi_3>a_3)=1-\frac{21}{\pi}\sum_{i=1}^{3}a_i-\frac{21}{\pi}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{3}{14}b_i^7+\frac{1}{2}b_i^5+\frac{1}{3}b_i^3\right)\cdot$$

$$\cdot\ln\frac{(b_i+b_s)(b_i+b_l)}{1+b_i^2}+\frac{21}{\pi}\left[\sum_{i<j}b_ib_j-1\right]\cdot[B_5(b_1,b_2,b_3)+B_3(b_1,b_2,b_3)+\quad(2)$$

$$+B_1(b_1,b_2,b_3)]-\frac{21}{\pi}\left[\sum_{i<j}b_i\cdot b_j-1\right]^3\cdot\sum_{i<j}\frac{b_i\cdot b_j}{b_i+b_j};\qquad\text{при } a_i\geqslant o,\ \sum_{i=1}^{3}a_i\leqslant\pi.$$

$P\left(\bigcap_{i=1}^{3}\{\xi_i>a_i\}\right)=0$, если $\exists_i\ a_i<0$, или $a_i\geqslant 0$, но $\sum_{i=1}^{3}a_i>\pi$, где $b_i=\operatorname{tg}\frac{a_i}{2}$, $i=1,2,3$, $s\neq i$, $s\neq i$, $l\neq i$, $B_k(x_1,x_2,x_3)$—симметричные полиномы k-ой степени, $k=1,3,5$, $B_k(x_1,x_2,x_3)=\sum_{l+m+n=k}c_{lmn}x_1^lx_2^mx_3^n$, которые определяются заданием коэффициентов c_{lmn}:

$$c_{500}=\frac{3}{14},\quad c_{410}=-\frac{3}{28},\quad c_{320}=\frac{1}{14},\quad c_{221}=\frac{27}{56},\quad c_{311}=\frac{1}{28},$$

$$c_{300}=\frac{11}{28},\quad c_{210}=-\frac{5}{28},\quad c_{111}=-\frac{37}{56},\quad c_{100}=\frac{13}{84}.$$

Из формулы (2) следует (при $a_1=a_2=a_3=x$), что

$$P(\min_{i=1,2,3}\xi_i>x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если } x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right];\\ 0, & \text{если } x\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right],\end{cases}\qquad(3)$$

где

$$\varphi(x)=1-\frac{3x}{\pi}-\frac{21}{\pi}\left(\frac{9}{14}b^7+\frac{3}{2}b^5+b^3\right)\cdot\ln\frac{4b^2}{1+b^2}+\frac{3}{16\cdot\pi}(99b^7+159\cdot b^5+$$

$$+29b^3-31\cdot b);\qquad b=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Также из формулы (2) после некоторых преобразований следует, что

$$P(\max_{i=1,2,3}\xi_i<x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\\ \varphi(x), & \text{если } x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right];\\ 1-3\cdot P(\xi_i>x), & \text{если } x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}\qquad(4)$$

$$P(\xi_i>x)=1-\frac{x}{\pi}-\frac{21}{\pi}\left(\frac{3}{14}b^7+\frac{1}{2}b^5+\frac{1}{3}b^3\right)\cdot\ln\frac{b^2}{1-b^2}-$$

$$-\frac{3}{\pi}\left(\frac{3}{2}b^5+\frac{11}{4}b^3+\frac{13}{12}b\right); \qquad x\in[0,\pi]. \tag{5}$$

Наконец, покажем, что $M\xi_i=\frac{\pi}{3}$. Интегрируя (5), получаем

$$M\xi_i=\int_0^\pi P(\xi_i>x)dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\ln(1+z)}{z(1+z)}dz.$$

Вычислим последний интеграл, сделав замену переменных $\ln(1+$ $+z)=t$:

$$\int_0^\infty\frac{\ln(1+z)}{z(1+z)}dz=\int_0^\infty\frac{tdt}{e^t+1}=\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty t\cdot e^{-nt}dt=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}\int_0^\infty t\cdot e^{-t}dt=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно, $M\xi_i=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, что можно было бы предвидеть, так как $\sum_{i=1}^3\xi_i=\pi$ и ξ_i одинаково распределены. Приведем таблицы значений $P(\xi_i>x)$, $P(\min\limits_{i=1,2,3}\xi_i>x)$ и $P(\max\limits_{i=1,2,3}\xi_i<x)$ для некоторых значений x:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$P(\xi_i>x)$	1	0,7957	0,7606	0,7366	0,7089	0,6324	0,5778	0,5055	0,4063

$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
0,3644	0,3266	0,2923	0,2610	0,2055	0,1572	0,1143	0,0868	0,0661	0

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$x\geqslant\frac{\pi}{3}$
$P(\min\limits_{i=1,2,3}\xi_i>x)$	1	0,6489	0,5936	0,4327	0,3779	0,2394	0,1536	0,05895	0

x	$x\leqslant\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$P(\max\limits_{i=1,2,3}\xi_i<x)$	0	0,0146	0,0584	0,1289	0,2169	0,3835	0,5285	0,657	0,7396	0,8017	1

Ереванский государственный университет

Վ. Կ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Հարթության վրա պուասոնյան պրոցեսի կետերով առաջացած եռանկյունիների ձևերի մասին

Հարթության վրա կետային պրոցեսների իրագործումների կետերով առաջացած պատահական եռանկյունների ձևերի (շեյպեր) վիճակագրական ուսումնասիրության խնդիրներում անհրաժեշտ է շեյպերի տարածության մեջ ունենալ հավանականությունների համար ստանդարտ բաշխումներ։ Այդպիսի մի բաշխում առաջարկվել է ([1])-ում։ Այն կարելի է օգտագործել հետևյալ հիպոթեզը ստուգելիս՝ դիտվող շեյպերը համապատասխանում են հարթ լեբեգի չափով ղեկավարվող պուասոնյան կետային պրոցեսի շեյպերին։

Նշանակենք ξ_i*-ով* $i=1, 2, 3$ *եռանկյան ներքին անկյունները։*

Այս հոդվածի հիմնական նպատակն է գտնել ξ_1, ξ_2, ξ_3 *անկյունների համատեղ բաշխումը (տես (2) բանաձևը)։ Մասնավորապես, դուրս են գրվել փոքրագույն և մեծագույն անկյունների բաշխումները (տես (3) ու (4) բանաձևերը) և միաչափ մարգինալ բաշխումը ((5) բանաձևը)։ Հոդվածի վերջում բերվում են* $P(\xi_i>x)$, $P(\min\limits_{i=1,2,3}\xi_i>x)$ *և* $P(\max\limits_{i=1,2,3}\xi_i<x)$ *բաշխումների թվային արժեքները։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. V. Ambartzumian*, in: Teubner Texte zur Mathematik, v. 65 (1984). [2] *R. V. Ambartzumian*, Swed. Univ. of Agr. Sc. Umea, p. 35-41, 1982. [3] *D. G. Kendall*, Bull. London Math. Soc., 1983. [4] *H. S. Sukiasian* in: Teubner zur Mathematik, v. 65 (1984).