ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXI 1985 2

УДК 517.983.24:[515.126+515.122.272]

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

О линейных ограниченных операторах, принадлежащих одному классу непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/XII 1983)

В статье приводятся некоторые результаты исследования линейных ограниченных операторов, принадлежащих введенному В. Г. Болтянским классу K_0 непрерывных отображений $f: M \to H$ подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства H. Определение и доказательства ряда основных свойств класса K_0 содержатся в [1]. Ряд других свойств отображений класса K_0 содержится в [2,3].

Приведем (упрощенное) определение класса K_0.

Пусть G—открытое подмножество пространства H и $f: G \to H$—непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f принадлежит классу K_0, если выполнены следующие условия:

1) f локально удовлетворяет условию Липшица, т. е. для всякой точки $x_0 \in G$ существуют такие $r>0$ и $c>0$, что при $x, y \in G$, $\|x-x_0\|<r$, $\|y-x_0\|<r$ выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant c\|x-y\|;$$

2) для любой точки $x_0 \in G$ и любого числа $\varepsilon>0$ существуют окрестность $U\subset G$ точки x_0 в H, конечномерное подпространство $L\subset H$ и действительное число λ такие, что если $x, y \in U$ и вектор $x-y$ ортогонален подпространству L, то выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\lambda(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|.$$

Фигурирующее в приведенном определении действительное число λ можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой x_0 и было пригодно для любого числа $\varepsilon>0$. В этом случае число λ однозначно определяется точкой $x_0 \in G$. Получающаяся таким образом действительная функция $\lambda(x)=\lambda_f(x)$, заданная на G, непрерывна и единственна; она называется терминальной производной отображения f.

Пусть теперь M—произвольное подмножество пространства H и $f: M\to H$—непрерывное отображение; будем говорить, что отображение f принадлежит классу K_0, если существует открытое в H подмножество $G\supset M$ и непрерывное отображение $g: G\to H$ такое, что $g \in K_0$ и $g(x)=f(x)$ для каждой точки $x \in M$.

Приведем теперь ряд свойств линейных ограниченных операторов $f: H \to H$, принадлежащих классу K_0.

Предложение 1. Терминальная производная $\lambda_f(x)$ линейного ограниченного оператора $f: H \to H$, принадлежащего классу K_0, является постоянной функцией на всем H.

Общее значение постоянной функции $\lambda_f(x)$ будем называть терминальным числом линейного ограниченного оператора f и обозначать символом λ_f.

Предложение 2. Пусть $f: H \to H$—линейный ограниченный оператор, принадлежащий классу K_0, тогда справедливы следующие утверждения:

1) $|\lambda_f| \leq \|f\|$;

2) если f инъективен и обратный оператор f^{-1} ограничен, то $|\lambda_f| = \|f\|$;

3) если оператор f биективен, то обратный оператор f^{-1} принадлежит классу K_0, причем $\lambda_{f^{-1}} = \dfrac{1}{\lambda_f}$.

Следствие 1. *Линейный гомеоморфизм пространства H на себя, принадлежащий классу K_0, является K_0-гомеморфизмом, т. е. гомеморфизмом в классе K_0.*

Замечание 1. Множество всех линейных K_0-гомеоморфизмов является подгруппой группы всех K_0-гомеоморфизмов пространства H.

Предложение 3. Всякий конечномерный линейный ограниченный оператор $f: H \to H$ принадлежит классу K_0 и его терминальное число λ_f равно нулю.

Следствие 2. *Для того чтобы линейный ограниченный оператор $f: H \to H$ принадлежал классу K_0, необходимо и достаточно, чтобы композиция $q \circ f$ или $f \circ q$ принадлежала классу K_0 для некоторого ортогонального проектора $q: H \to M$ пространства H на замкнутое подпространство M конечного дефекта относительно H.*

Предложение 4. Пусть $f: H \to H$ такой линейный ограниченный оператор, для которого выполнено условие: для всякого $\varepsilon > 0$ существует линейный ограниченный оператор $f_\varepsilon: H \to H$, принадлежащий классу K_0 и удовлетворяющий соотношению $\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Тогда оператор f принадлежит классу K_0.

Следствие 3. *Множество всех линейных ограниченных операторов $f: H \to H$, принадлежащих классу K_0, замкнуто в пространстве всех линейных ограниченных операторов пространства H в себя с равномерной метрикой $\rho(fg) = \|f - g\|$.*

Предложение 5. Пусть линейный ограниченный оператор $f: H \to H$ является пределом (по норме) последовательности линейных ограниченных операторов $f_n: H \to H$, принадлежащих классу K_0, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$. Тогда

1) $f \in K_0$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_{f_n} = \lambda_f$.

Следствие 4. *Всякий линейный вполне непрерывный опера-*

тор $f: H \to H$ принадлежит классу K_0 и его терминальное число λ_f равно нулю. Более того, если $g: H \to H$ произвольный линейный ограниченный оператор, то операторы $g \circ f$ и $f \circ g$ принадлежат K_0 и $\lambda_{g \circ f} = \lambda_{f \circ g} = 0$.

Предложение 6. Пусть $f: H \to H$—унитарный оператор, принадлежащий классу K_0, а $g: H \to H$—линейный ограниченный оператор. Тогда если композиция $h = g \circ f: H \to H$ принадлежит классу K_0 и $\lambda_h \neq 0$, то оператор $g \in K_0$ и $|\lambda_g| = |\lambda_h|$.

Замечание 2. Предыдущее предложение остается справедливым, если линейный ограниченный оператор g заменить любым отображением $g: H \to H$, локально удовлетворяющим условию Липшица.

Предложение 7. Пусть $f: H \to H$—унитарный оператор и $g: H \to H$—линейный ограниченный оператор, принадлежащий классу K_0, причем $|\lambda_g| = 1$. Тогда если композиция $h = g \circ f: H \to H$ принадлежит классу K_0, то и оператор $f \in K_0$ и $|\lambda_f| = |\lambda_h|$.

Следствие 5. *Если композиция двух унитарных операторов $f, g: H \to H$ и один из этих операторов принадлежат K_0, то и другой оператор принадлежит классу K_0.*

Замечание 3. Утверждение предложения 7 остается справедливым, если в нем оператор g заменить любым отображением $g: H \to H$, принадлежащим классу K_0 и удовлетворяющим условию $|\lambda_g(x)| = 1$ для каждой точки $x \in H$.

Ереванский государственный
университет

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների մի դասին պատկանող գծային սահմանափակ օպերատորների մասին

Հոդվածում բերվում են իրական սեպարաբել H հիլբերտյան տարածության և ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների Վ. Գ. Բոլտյանսկու կողմից մտցված K_0 դասին պատկանող գծային օպերատորների հետազոտման մի քանի արդյունքներ։

Մասնավորապես պարզվում է, որ յուրաքանչյուր գծային լիովին անընդհատ $f: H \to H$ օպերատոր պատկանում է K_0 դասին, ընդ որում f օպերատորի λ_f թերմինալ թիվը հավասար է զրոյի։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Г. Болтянский*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, № 2 (1974). [2] *В. Г. Болтянский, Э. А. Мирзаханян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, № 5 (1974). [3] *Э. А. Мирзаханян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 15, № 5 (1980). [4] *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев*, Элементы функционального анализа, Наука, М., 1965.