

УДК 539.3 : 534.1

МЕХАНИКА

С. О. Саркисян

К задачам о колебании прямоугольной пластинки
 и пологой оболочки в продольном магнитном поле

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 22/VI 1984)

Задаче о колебании прямоугольной пластинки в продольном магнитном поле на основе гипотез магнитоупругости тонких тел ⁽¹⁾ посвящены работы ^(2,3)

В данной работе рассматриваются колебания прямоугольных пластин и весьма пологих оболочек в продольном магнитном поле. Как исходные уравнения здесь принимаются уравнения магнитоупругости для тонких оболочек и пластин работы ⁽⁴⁾, имеющих $O(e^{2-2r})$ асимптотическую точность. В указанных уравнениях по сравнению с уравнениями, построенными на основе гипотез магнитоупругости ⁽¹⁾, появляются новые члены электромеханического происхождения. Численные исследования показывают, что относительно толстые пластинки и пологие оболочки могут терять устойчивость. Для более тонких пластин и пологих оболочек возникает явление, обнаруженное С. А. Амбарцумяном в ⁽⁵⁾, а именно, при возрастании напряженности магнитного поля частота колебаний сначала уменьшается, далее происходят аperiодические колебания, а когда напряженность магнитного поля превышает определенное значение, частота колебаний резко возрастает.

1. Рассматривается свободное колебание прямоугольной пластинки толщиной $2h$, с продольными размерами $2a$ и $2b$, с конечной электропроводностью σ , находящейся в продольном постоянном магнитном поле напряженности H_x .

Изучение свободных магнитоупругих колебаний прямоугольной пластинки в продольном магнитном поле приводится к решению следующей системы интегродифференциальных уравнений ⁽⁴⁾:

$$\begin{aligned} \bar{E}_y(x, y) = & -\frac{\omega}{c} \frac{1}{2\pi} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \left[-\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \bar{E}_y^*}{\partial x_0} - \frac{\partial \bar{E}_x^*}{\partial y_0} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\bar{E}_y^* + \frac{H_x}{c} \omega w^* \right) - \frac{16\pi^2 \sigma^2 h^2}{3c^2} \left(\omega \bar{E}_y^* + \frac{H_x}{c} \omega^2 w^* \right) \right] dx_0 dy_0; \\ \bar{E}_x^*(x, y) = & \frac{\omega}{c} \frac{1}{2\pi} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \left[-\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \bar{E}_y^*}{\partial x_0} - \right. \right. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$-\frac{\partial \bar{E}_x^*}{\partial y_0} \Big) - \frac{4\pi\omega}{c} \bar{E}_x^* + \frac{16\pi^2\omega^2 h^2}{3c^3} \omega \bar{E}_x^* \Big| dx_0 dy_0;$$

$$D\nabla^2\nabla^2 w^* + 2\phi h \omega^2 w^* + \frac{2\omega h}{c^2} H_x^2 \omega w^* + \\ + \frac{2\omega h}{c} H_x \bar{E}_y^* - \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^2 h^3}{c^3} \left(\omega H_x \bar{E}_y^* + \frac{1}{c} H_x^2 \omega^2 w^* \right) = 0;$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}; \quad -\infty < x, y < \infty; \quad -a \leq x_0 \leq a; \quad -b \leq y_0 \leq b,$$

где $\bar{E}_x^*$, $\bar{E}_y^*$ — напряженность возбуждаемого электрического поля на лицевых поверхностях пластинки, w^* — нормальное перемещение пластинки, ω — частота колебания, c — скорость света.

На границах пластинки $x = \pm a$ и $y = \pm b$ для упругой части задачи принимается шарнирное опирание.

Принимая безразмерные обозначения

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad k = \frac{b}{a}, \quad \epsilon = \frac{h}{a}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad v_z^* = \frac{w^*}{h}, \quad (1.2)$$

где ω_0 — собственная частота колебаний пластинки при отсутствии магнитного поля, для решения систем уравнений (1.1) принимается метод Бубнова — Галеркина, при этом, как отмечает С. Г. Михлин⁽⁶⁾, весьма важно так подобрать координатные функции, чтобы сингулярные интегралы просто вычислялись.

Итак, представим $\bar{E}_x^*(\xi, \eta)$, $\bar{E}_y^*(\xi, \eta)$ и $v_z^*(\xi_0, \eta_0)$ в виде

$$\bar{E}_x^*(\xi, \eta) = X \cdot \varphi(\xi, \eta); \quad \bar{E}_y^*(\xi, \eta) = Y \cdot \varphi(\xi, \eta); \quad v_z^* = Z \sin \frac{\pi}{2} (1 - \xi_0) \sin \frac{\pi}{2k} (k - \eta_0), \quad (1.3)$$

где $\varphi(\xi, \eta) = \frac{\partial v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}$, $v(\xi, \eta, \zeta)$ — преобразование Кельвина гармонического полинома⁽⁶⁾.

Если $v(\xi, \eta, \zeta)|_{\zeta=0} = \Phi(\xi, \eta)$, тогда имеет место следующее соотношение⁽⁶⁾:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \Phi(\xi_0, \eta_0). \quad (1.4)$$

В данном случае за гармонический полином принимается функция $u = z$, тогда его преобразование Кельвина будет

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\zeta + 2 - 2r^2}{r^3}, \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta + 2)^2.$$

Итак, после подстановки (1.3) в уравнения (1.1) и применения обычной процедуры метода Бубнова — Галеркина с учетом соотношения (1.4) относительно неизвестных коэффициентов X , Y , Z получается однородная алгебраическая система. Обращая определитель этой системы в нуль, получим алгебраическое уравнение шестой степени для определения комплексной безразмерной частоты Ω .

$$\begin{aligned}\bar{E}_y^*(x, y) = & -\frac{\omega}{c} \frac{1}{2\pi} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \left[-\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \bar{E}_y^*}{\partial x_0} - \frac{\partial \bar{E}_x^*}{\partial y_0} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\bar{E}_y^* + \frac{H_x}{c} \omega \omega^* \right) - \frac{16\pi^2 \sigma^2 h^2}{3c^3} \left(\omega \bar{E}_y^* + \frac{H_x}{c} \omega^2 \omega^* \right) \right] dx_0 dy_0; \\ \bar{E}_x^*(x, y) = & -\frac{\omega}{c} \frac{1}{2\pi} h \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \left[-\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \bar{E}_y^*}{\partial x_0} - \frac{\partial \bar{E}_x^*}{\partial y_0} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{4\pi\sigma}{c} \bar{E}_x^* + \frac{16\pi^2 \sigma^2 h^2}{3c^3} \omega \bar{E}_x^* \right] dx_0 dy_0; \quad (2.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 F + D \frac{3(1-\nu^2)}{h^2} \nabla_k^2 \nabla^2 F^* + 2\rho h \omega^2 \nabla^2 \nabla^2 F^* + \\ + \frac{2\sigma h}{c^2} H_x^2 \omega \nabla^2 \nabla^2 F^* + \frac{2\sigma h}{c} H_x \bar{E}_y^* - \frac{8\pi}{3} \frac{\sigma^2 h^3}{c^3} \left(\omega H_x \bar{E}_y^* + \frac{1}{c} H_x^2 \omega^2 \omega^* \right) = 0,\end{aligned}$$

где

$$\omega^* = \nabla^2 \nabla^2 F^*, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}, \quad \nabla_k^2 = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}.$$

Для упругой части задачи принимается шарнирное опирание.

Поступая аналогичным образом, как и в предыдущей задаче, для определения безразмерной частоты колебания Ω получается алгебраическое уравнение шестой степени.

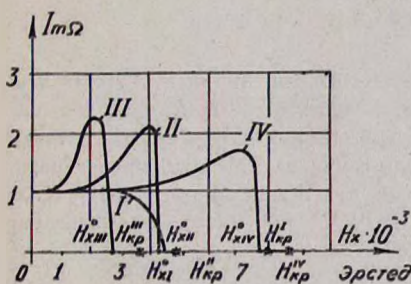


Рис. 3.

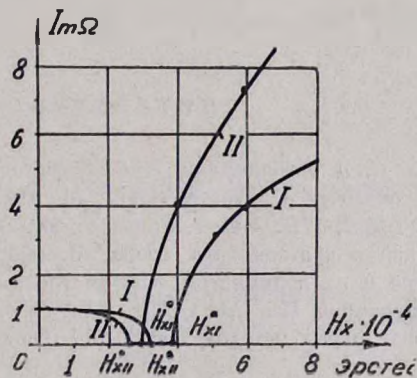


Рис. 4.

Приводим результаты численных вычислений. На рис. 3 график I соответствует случаю $R_1 = R_2 = R = 8a$, $k = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $h = 0.5$ см; график II — случаю $R_1 = R_2 = R = 8a$, $k = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$, $h = 1$ см; график III — случаю $R_1 = R_2 = R = 8a$, $k = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$, $h = 2$ см; график IV — случаю $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}$, $R = 8a$, $k = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{25}$, $h = 0.5$ см.

На рис. 4 график I соответствует случаю $R_1 = R_2 = R = 8a$.

$k=1$, $\varepsilon=0,001$, $h=0,001$ см.; график II—случаю $R_1=8a$, $\frac{1}{R_2}=0$, $k=1$, $\varepsilon=0,001$, $h=0,001$ см.

Как видно из графиков, получаемые результаты для пологих оболочек аналогичны предыдущей задаче.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ուղղանկյուն սալի և թեփ թաղանթի երկայնական մագնիսական դաշտում առաժանումների խնդիրների մասին

Դիտարկվում է ուղղանկյուն սալի և թեփ թաղանթի մագնիսաառաժական տատանումների երկայնական մագնիսական դաշտում: Որպես ելակետային հավասարումներ ընդունվում են ամրոդշության մեջ ասիմպտոտիկորեն ճիշտ բարակ թաղանթների և սալերի մագնիսաառաժականության երկչափ հավասարումները:

Ելակետային ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարումների լուծման համար, որոնք ունեն որոշակի եզակիություն, պարունակող կորիզներ, կիրառվում է Բուրնով-Գալյորկինի մեթոդը: Ուղղանկյուն սալի և թեփ թաղանթի, չափողականություն չունեցող կոմպլեքս հաճախականության համար ստացվում են վեցերորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումներ, որոնք լուծվում են թվային մեթոդներով: Բերված թվային արդյունքները ցույց են տալիս սալերի և թաղանթների կայունության կորստի հնարավորությունը մագնիսական դաշտում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977. ² М. В. Белубекян, С. Р. Сароян, Уч. зап. ЕГУ, № 2, 1979. ³ С. В. Саркисян, Уч. зап. ЕГУ, № 1, 1981. ⁴ С. О. Саркисян, Тезисы лекций и кратких науч. сообщ. Всесоюзной школы-семинара «Методы малого параметра и их применение», Изд-во Ин-та математики АН БССР, Минск, 1982. ⁵ С. А. Амбарцумян, Изв. АН СССР, МТТ, № 4, 1983. ⁶ С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, Наука, М., 1966.