

УДК 539.4.012.1:517.968

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. А. Матехин, Н. А. Никольская

Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений в бесконечных областях, содержащих вырезы с угловыми точками границы

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии бесконечной плоскости с вырезом, симметричным относительно оси  $Ox$ . Предполагается, что вырез имеет угловую точку, в окрестности которой его граница совпадает с углом произвольного раствора. На границе выреза приложена постоянная распределенная нагрузка, действующая вдоль оси  $Oy$ .

На основе метода Мазыи—Пламеневского <sup>(1)</sup> коэффициент интенсивности выражается через известные параметры и некоторый интеграл от приближенного решения задачи. В частных случаях прямолинейной внутренней трещины и полубесконечной трещины, нагруженной ступенчатой нагрузкой, получены формулы, совпадающие с известными. В случае, когда вырез имеет вид ромба, получены численные значения коэффициента интенсивности. Для входящего бесконечного угла, нагруженного ступенчатой нагрузкой, получена аналитическая формула.

Рассмотрим бесконечную область ( $\Omega$ ) с внутренним вырезом  $\partial\Omega$ , совпадающим при  $x \geq 0$  с углом раствора  $2(\pi - W)$  (см. рис. 1).

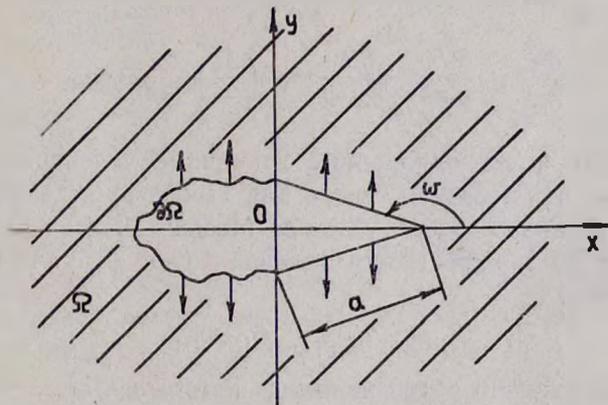


Рис. 1.

$$\sigma_{yy} = -P.$$

Пусть на границе выреза задана нагрузка. Для функции Эри имеем краевую задачу:

$$\Delta \Delta \Phi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\Phi(x, y) = \varphi_1(x); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, y) = \varphi_2 \cos(\pi, \hat{x}) \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad R^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \infty,$$

где  $\varphi_1 = -P \frac{x^2}{2}$ ;  $\varphi_2 = -Px$ .

Рассмотрим в области  $\Omega$  функцию  $w(x, u) = -P \frac{x^2}{2}$ . Очевидно,

на  $\partial\Omega$   $\frac{\partial w}{\partial n} = -Px \cos(n, \hat{x})$ . Введем новую функцию

$$F(x, y) = \Phi(x, y) - w(x, y)\eta(\rho), \quad (2)$$

$(\rho, \varphi)$  — полярная система координат с центром в угловой точке;  $\eta(\rho)$  — срезающая функция

$$\eta(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho < \rho_1 \\ \text{гладкая функция,} & \rho_1 < \rho < \rho_2, \\ 0, & \rho > \rho_2 \end{cases}$$

причем  $0 < \rho_1 < \rho_2 < a$ .

Учитывая, что на стороне угла  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$  и, следовательно,

$\frac{\partial \eta}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$ , для  $F(x, y)$  имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta^2 F &= -\Delta^2(w\eta(\rho)) \equiv f(x, y) \quad (x, y) \in \Omega, \\ F(x, y) &= \varphi_1(x)[1 - \eta(\rho)], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n}(x, y) = \varphi_2(x)[1 - \eta(\rho)] \cos(n, \hat{x}) \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = O\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Задача (3) имеет однородные граничные условия в окрестности угловой точки, что позволит теперь для вычисления коэффициента интенсивности воспользоваться методом Мазыи—Пламеневского (1).

Согласно (2) в окрестности угловой точки функция  $F(x, y)$  представима в виде

$$F \cong C\rho^{1+\lambda} g_\lambda(\varphi) + O(\rho^{1+\lambda}); \quad (4)$$

здесь  $C$  — коэффициент интенсивности, который в силу (2) совпадает с коэффициентом для функции  $\Phi(x, y)$ ;  $\lambda$  — решение уравнения

$$\sin(2\lambda\omega) = -\lambda \sin(2\omega); \quad (5)$$

$$g_\lambda(\varphi) = \cos[(\lambda-1)\varphi] - \frac{\cos[(\lambda-1)\omega]}{\cos[(\lambda+1)\omega]} \cos[(\lambda+1)\varphi] \quad (6)$$

Следуя методу Мазыи—Пламеневского, для определения коэффициента интенсивности  $C$  воспользуемся формулой Грина для бигармонического оператора

$$\int_S (F \Delta^2 v - v \Delta^2 F) dS = \int_{\Gamma} \left( F \frac{\partial \Delta v}{\partial n} + \Delta F \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \Delta F}{\partial n} - \Delta v \frac{\partial F}{\partial n} \right) d\Gamma. \quad (7)$$

Интегрирование в (7) ведется в специально выбранной области  $S$ , границей которой служат два луча  $\Gamma_1 = \{(\rho, \varphi) : \varepsilon < \rho_1 < R, \varphi = \pm \omega\}$  и две окружности  $\Gamma_2 = \{(\rho, \varphi) : \rho = \varepsilon, |\varphi| \leq \omega\}$ ,  $\Gamma_R = \{(\rho, \varphi) : \rho = R, |\varphi| \leq \omega\}$  (см. рис. 2).

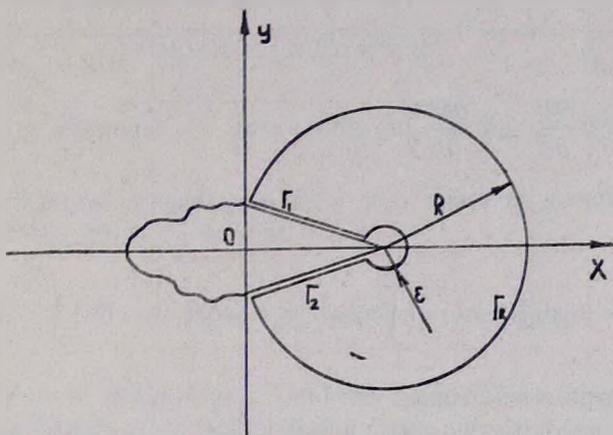


Рис. 2.

Кроме того, в (7)  $F(x, y)$  — решение задачи (3);  $v(x, y)$  — неэнергетическое однородное решение бигармонической задачи в угле  $|\varphi| \leq \omega$ ,  $v \in L_2$ .

$$v(\rho, \varphi) = \rho^{1-\lambda} g_{-\lambda}(\varphi), \quad v \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0. \quad (8)$$

Показатель особенности в (8) выбран таким образом, чтобы интеграл по окружности ( $\Gamma_2$ ) в (7) не зависел от ее радиуса ( $\varepsilon$ ).

Легко видеть, что в силу соответствующего убывания подынтегральных функций на бесконечности интеграл по  $\Gamma_R$  при  $R \rightarrow \infty$  стремится к нулю, а интегралы по  $\Gamma_1$  остаются при этом конечными.

Вычислим интегралы, входящие в формулу (7). Интеграл по  $\Gamma_2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  легко вычисляется, если учесть, что в окрестности угловой точки функции  $F(x, y)$  имеет место разложение (4). После некоторых преобразований получим

$$J_{\Gamma_2} = 8C\lambda [2\omega \cos(2\omega) + \sin(2\omega)]. \quad (9)$$

Интеграл по лучам  $\Gamma_1$  представим в виде суммы:

$$J_{\Gamma_1} = \int_0^{\rho_1} A(\rho) d\rho + \int_{\rho_1}^{\rho_2} B(\rho) d\rho + \int_{\rho_2}^a C(\rho) d\rho + \int_a^{\infty} D(\rho) d\rho. \quad (10)$$

Из-за однородных граничных условий на части границы  $0 < \rho < \rho_1$  первый интеграл в (10) равен нулю; второй интеграл выражается через некоторые интегралы от срезающей функции и ее производных:

$$P_k = \int_{P_1}^{P_2} \rho^{k-\lambda} \tau_1(\rho) d\rho, \quad P_k' = \int_{P_1}^{P_2} \rho^{k-\lambda} \tau_1'(\rho) d\rho.$$

Третий интеграл удается взять в явном виде. Опуская громоздкие вычисления, выпишем окончательное выражение для коэффициента интенсивности:

$$C = \frac{\rho \frac{a^{1-\lambda}}{(1-\lambda^2)} \sin[(\lambda+1)\omega] [\lambda \cos^2 \omega - \sin^2(\lambda\omega)] + \frac{1}{2} J}{2\lambda \omega \cos(2\lambda\omega) + \lambda \sin(2\omega)},$$

где  $J = \int_a^\infty \left( \Delta v \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Delta v}{\partial n} \right) d\rho$  при  $\varphi = \omega$ . Интегрируя по частям, учитывая граничные условия при  $\rho = a$  и условия на бесконечности, получим

$$J = -8 \sin[(\lambda+1)\omega] \int_a^\infty \sigma_{\varphi\varphi} \rho^{-\lambda} d\rho + 8 \cos[(\lambda+1)\omega] \int_a^\infty \tau_{\varphi\varphi} \rho^{-\lambda} d\rho.$$

Рассмотрим некоторые случаи.

1. Задача о растяжении плоскости с внутренней прямолинейной трещиной длиной  $2a$ . Функция Эри для такой задачи имеет вид

$$\Phi = \frac{Pa^2}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{z}{a} \right) \left[ \sqrt{\left( \frac{z}{a} \right)^2 - 1} - \left( \frac{z}{a} \right) \right] - \ln \left[ \left( \frac{z}{a} \right) + \sqrt{\left( \frac{z}{a} \right)^2 - 1} \right] \right\},$$

при  $\rho = a - x$ ,  $y = 0$  имеем

$$\frac{2}{\rho} \Phi = \left\{ (\rho - a) \sqrt{\rho^2 - 2a\rho} - (\rho - a)^2 - a^2 \ln(\rho - a + \sqrt{\rho^2 - 2a\rho}) + a^2 \ln a \right\}.$$

В силу симметрии задачи  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{y=0} = 0$ . Остается воспользоваться фор-

мулами (14) и (15). В результате получаем  $C = P \sqrt{\frac{a}{2}}$ , что соответствует известному выражению (3).

2. Задача о напряженно-деформированном состоянии плоскости с входящим углом, нагруженным силой  $\sigma_{yy} = -P$ , распределенной на отрезке длиной  $a$ , включающем вершину угла. Очевидно, в этом случае  $J = 0$  и для коэффициента интенсивности имеем аналитическую формулу

$$C = \frac{Pa^{1-\lambda} \sin[(\lambda+1)\omega] \{ \lambda \cos^2 \omega - \sin^2(\lambda\omega) \}}{(1-\lambda)^2 [2\lambda \omega \cos(2\lambda\omega) + \lambda \sin(2\omega)]}$$

В случае полубесконечной трещины ( $\omega = \pi$ )  $C = \frac{2P}{\pi} \sqrt{a}$ , что совпадает с известным выражением (3).

3. Задача о растяжении плоскости с вырезом в виде ромба. В этом случае при вычислении интеграла  $J$  использовалось численное решение задачи, полученное при решении интегрального уравнения

Мусхелишвили при использовании конформного отображения Кристоффеля-Шварца. В таблице приведены значения коэффициента интенсивности для плоскости с входящим углом ( $C_x$ ) и для плоскости с вырезом в виде ромба ( $C_R$ ) в зависимости от величины  $\omega$  (значения  $C$  отнесены к величине  $\rho\sqrt{\frac{a}{2}}$ ).

$\omega$	$0,55\pi$	$0,6\pi$	$0,65\pi$	$0,7\pi$	$0,75\pi$	$0,8\pi$	$0,85\pi$	$0,9\pi$	$0,95\pi$	$\pi$
$C_x$	0,35	0,45	0,57	0,67	0,75	0,81	0,86	0,89	0,9	0,9
$C_R$					0,66	0,75	0,86	0,94	0,99	1,0

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

#### Ն. Ա. ՄԱՏԵՆԻՆ, Ն. Ա. ՆԿՈՒՍՎԱՅԱ

Եզրագծի վրա անկյունային կետերով կտրված ֆեներ պարունակող անվերջ տիրույթներում լարումների ինտենսիվության գործակիցների հաշվումը

*Օչ առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ կտրվածքով անվերջ հարթության լարված և դեֆորմացված վիճակի խնդրում հաշվվում է լարումների ինտենսիվության գործակիցը:*

*Կտրվածքն ունի անկյունային կետ, որի շրջակայքում նրա եզրագիծը համընկնում է կամայական բացվածքով անկյան հետ: Եզրագծի վրա կիրառված է հաստատուն ընդ:*

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> В. Г. Мизья, Б. А. Пламеневский, ДАН СССР, т. 219, № 2 (1974). <sup>2</sup> В. А. Кондратьев, Тр. моск. маг. о-ва, т. 16, № 209 (1967). <sup>3</sup> Дж. Райс, в кн.: Разрушение, Мир, М., 1975. <sup>4</sup> С. С. Заргирян, в сб.: Механика (Ереван), вып. 3 (1984).