ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXI 1985 1

УДК 512.776

МАТЕМАТИКА

С. Г. Далалян

Дискриминантная форма конечного семейства однородных полиномов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 5/I 1984)

Понятие дискриминантной формы объединяет и обобщает понятия результанта (в частности, детерминанта) и дискриминанта. В отличие от работ ([1,2]), в которых понятие детерминанта обобщается с сохранением его формально-алгебраических свойств, нас больше интересует геометрическая сторона вопроса.

Пусть $A=\mathrm{A}^{N_1}\times\ldots\times\mathrm{A}^{N_m}=\mathrm{A}^N$—пространство семейств однородных полиномов $f=(f_1,\ldots,f_m)$, определенных на аффинном пространстве A^n и имеющих степени $\deg f_k=s_k$. Целочисленная последовательность $s=(s_1, s_2,\ldots,s_m)$ называется мультистепенью семейства f, ею вполне определяется пространство $\mathrm{A}=A_s$. Все рассматриваемые полиномы считаются определенными над фиксированным алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, $n>1$.

Уравнения $f_k(x)=0$, $k=1,\ldots,m$ определяют подмногообразие Z в $A\times\mathrm{P}^{n-1}$. Проекция на первый сомножитель $p_1: Z\to A$ является расслоением на полные пересечения X_f гиперповерхностей X_{f_k} в $\mathrm{P}^{n-1}=\mathrm{P}(\mathrm{A}^n)$. Проекция на второй сомножитель $p_2: Z\to\mathrm{P}^{n-1}$ представляет из себя аффинное расслоение со слоем коразмерности m в A. Поэтому многообразие Z гладко, неприводимо и имеет размерность $\dim Z=(n-1)+(N-m)$.

Полное пересечение X_f в общей точке f пространства A_s неособо и имеет коразмерность m в P^{n-1}. Размерность X_f в произвольной точке f зависит от ранга якобиевой матрицы $\mathcal{J}(f)=\|\partial f_k/\partial x_i\|_{i=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,m}$. Подмногообразие $\mathcal{S}$ многообразия Z определим эквивалентными условиями

$$(\varphi,\xi)\in\mathcal{S}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}\dim X_\varphi=n-m-1,\quad \xi\in\operatorname{sing}X_\varphi\\ \dim X_\varphi\geqslant\max(0,n-m),\quad \xi\in X_\varphi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\operatorname{rk}\mathcal{J}(\varphi)(\xi)<\min(m,n).$$

Очевидно, многообразие $\mathcal{S}$ и его проекция $\mathcal{Y}=p_1(\mathcal{S})$ замкнуты в топологии Зарисского соответствующих пространств.

Определение. Проекция $\mathcal{Y}$ многообразия $\mathcal{S}$ в A_s называется дискриминантным многообразием мультистепени s. Таким образом, дискриминантное многообразие есть замкнутое множество пространства A_s, над которым слои проекции p_1 специальны (особы или имеют подскок размерности).

Предложение 1. (i) *При* $m \geqslant n$ *дискриминантное многообразие* $\mathcal{Y}$ *неприводимо и имеет коразмерность* $m-n+1$ *в* A_s.

(ii). *При* $m \geqslant n$

$$\operatorname{codim}_A \mathcal{Y} = \begin{cases} 1, \text{ если не все } s_k=1, \ k \in [1, m]; \\ (n-m+1), \text{ если } s_k=1 \text{ при всех } \ k \in [1, m]. \end{cases}$$

Доказательство теоремы опирается на две леммы.

Лемма 1. (i) *При* $m \geqslant n$, *а также при* $m<n$, *когда не все* $s_k=1$, $k \in [1, m]$, *проекция* $p_1: \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$ *является рациональным отображением степени* 1 *и* $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{Y}$.

(ii). *Если* $m<n$ *и все* $s_k=1$, $k \in [1, m]$, *общий слой проекции* $p_1: \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$ *изоморфен* P^{n-m} *и* $\dim \mathcal{Y} = \dim \mathcal{S} - (n-m)$.

Действительно, в первом случае единственным прообразом общей точки φ дискриминантного многообразия $\mathcal{S}$ является точка (φ, ξ), где ξ—единственная особая точка X_φ, если $m<n$, или единственная точка X_φ, если $m \geqslant n$. Во втором случае

$$(\varphi, \xi) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \dim X_\varphi > n-m-1 \geqslant 0, \ \xi \in X_\varphi,$$

поэтому $p_1^{-1}(\varphi) = X_\varphi \cong \mathrm{P}^{n-m}$ для общей точки φ.

Лемма 2. *Для любого* $j \in [1, n]$ *на открытом множестве* Z_j *многообразия* Z, *определяемом условием* $x_j \neq 0$, j*-тый столбец якобиевой матрицы* $\mathcal{J}(f)$ *является линейной комбинацией остальных столбцов.*

Для доказательства леммы 2 достаточно заметить, что для любой точки (φ, ξ) многообразия Z

$$\sum_{l=1}^{n} \partial \varphi_k / \partial x_l(\xi) \xi_l = 0, \ k \in [1, m].$$

Из леммы 2 следует, что $\operatorname{rk}(\mathcal{J}(f)) \leqslant n-1$ на Z. Поэтому при $m \geqslant n$ многообразие $\mathcal{S}$ совпадает с Z, и, следовательно, $\mathcal{Y} = p_1(Z)$ неприводимо и $\dim \mathcal{Y} = \dim Z = N+(n-1)-m$.

При $m<n$ в общей точке (f, x) многообразия Z $\operatorname{rk}(\mathcal{J}(f)) = m$ и $\operatorname{rk} \|\partial f_k / \partial x_l\|_{l=j_1, \ldots, j_{m-1}}^{k=1, \ldots, m} = m-1$. Согласно лемме 2 на открытом множестве Z_{j_0} многообразие $\mathcal{S}$ определяется уравнениями

$$\det \left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right\|_{l=j_1, \ldots, j_{m-1}, j}^{k=1, \ldots, m} = 0 \quad (j \in [1, n] \setminus \{j_0, j_1, \ldots, j_{m-1}\}).$$

Следовательно, $\dim \mathcal{S} \geqslant N+(n-1)-m-(n-m) = N-1$. Так как $\mathcal{Y} \neq A_s$, то в случае, когда не все $s_k=1$, $k \in [1, m]$, получаем $\operatorname{codim}_A \mathcal{Y} = 1$. Если $s_k=1$ при всех $k \in [1, m]$, то якобиева матрица $\mathcal{J}(f)$ составлена из коэффициентов линейных форм f_k, поэтому вышеприведенные уравнения независимы и определяют многообразие $\mathcal{S}$ размерности $N-1$. Ввиду леммы 1 $\dim \mathcal{Y} = (N-1)-(n-m)$.

Следствие—определение. (i). *При* $m \geqslant n$ *идеал* $\mathfrak{I}_{\mathcal{Y}}$ *дискриминантного многообразия* $\mathcal{Y}$ *порождается конечным семейством форм, называемым системой результатов однородных полиномов* $f_1, \ldots, f_m$ (3).

(ii). *Если* $m \leqslant n$ *и не все* $s_k=1$, $k \in [1, m]$, *идеал* $\mathfrak{I}_{\mathcal{Y}}$ *порожда-*

ется одной формой $\operatorname{disc}_n(f_1, \ldots, f_m) = \operatorname{disc}_n(f)$, *которую мы будем называть дискриминантом конечного семейства однородных полиномов* $f = (f_1, \ldots, f_m)$. *Дискриминантная форма однозначно определяется условием нормировки*

$$\operatorname{disc}_n(x_1^{s_1} + \ldots + x_{n-m+1}^{s_1}, \ldots, x_m^{s_m} + \ldots + x_n^{s_m}) = 1. \quad (m = 1; n-1; n).$$

При $m = n$ система результантов состоит из одной формы, совпадающей с дискриминантом. Отметим, что согласно предложению 1 результант $\operatorname{disc}_n(f_1, \ldots, f_n)$ является неприводимой формой и в случае, когда все полиномы f_k, $k \in [1, n]$ линейны, он равен детерминанту матрицы коэффициентов $\mathcal{J}(f)$. Следующие свойства дискриминантной формы являются обобщениями соответствующих свойств результанта (см. ([4])). Они справедливы при условиях $s_k \geqslant 1$, $k \in [1, m]$ и при $m < n$ не все $s_k = 1$.

A°. *Для любой подстановки* $\sigma \in S_m$

$$\operatorname{disc}_n(f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(m)}) = \mu_A \cdot \operatorname{disc}_n(f_1, \ldots, f_m).$$

При $m = n$ $\mu_A = \varepsilon_\sigma^{s_1 \cdots s_n}$, *где* ε_σ — *функция четности на симметрической группе* S_n. *При* $m = n-1$ $\mu_A = 1$.

B°. *Если однородный полином* $\tilde{f}_m - f_m$ *принадлежит идеалу* $(f_1, \ldots, f_{m-1})$, *то*

$$\operatorname{disc}_n(f_1, \ldots, f_{m-1}, \tilde{f}_m) = \mu_B \cdot \operatorname{disc}_n(f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m).$$

При $m = n$ $\mu_B = 1$.

C°. *Предположим, что* $a_k(x) = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_l$, $k \in [1, t]$, $t < m$ — *линейные формы*, $\mathcal{J}(a)$ — *якобиева матрица семейства* $a = (a_1, \ldots, a_t)$, Δ — *определитель, составленный из ее первых* t *столбцов*, $\Delta_i(a^j)$ — *определитель, получаемый из* Δ *заменой* i-*того столбца на* j-*тый столбец* a^j *якобиевой матрицы* $\mathcal{J}(a)$, $\tilde{f}_k = f_k(\Delta_1(a^{t+1}) x_{t+1} + \ldots + \Delta_1(a^n) x_n, \ldots, \Delta_t(a^{t+1}) x_{t+1} + \ldots + \Delta_t(a^n) x_n, -\Delta x_{t+1}, \ldots, -\Delta x_n)$, $k \in [t+1, m]$. *Тогда*

$$\operatorname{disc}_n(a_1, \ldots, a_t, f_{t+1}, \ldots, f_m) \cdot \Delta^l = \operatorname{disc}_{n-t}(\tilde{f}_{t+1}, \ldots, \tilde{f}_m).$$

D°. *Дискриминантная форма обобщенно-мультипликативна относительно своих переменных*

$$\operatorname{disc}_n(f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m' f_m'') =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{disc}_n(f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m') \cdot \operatorname{disc}_n(f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m''), & m = n; \\ \mu_D \operatorname{disc}_n(f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m') \cdot \operatorname{disc}_n(f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m) \cdot \operatorname{disc}_n(f_1, \ldots, f_{m-1}, & \\ \qquad f_m', f_m''), & m = n-1; \\ 0, \quad m < n-1. & \end{cases}$$

При $m < n$ *формула справедлива без ограничения* $\max_l s_l > 1$, *если считать дискриминант семейства линейных форм тождественно равным* 1.

E°. *Пусть* Δ_j — *определитель, составленный из первых* $(m-1)$-*го и* $(j-1)$-*го столбцов якобиевой матрицы* $\mathcal{J}(f)$ *семейства* $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $\tilde{f}_k$ *получается из* f_k *подстановкой* $x_n = 0$. *При* $m < n$

$$\mathrm{disc}_n(f_1, \ldots, f_m, \Delta_{m+1}, \ldots, \Delta_n) = i_E \mathrm{disc}_n(f_1, \ldots, f_m)^T \cdot \mathrm{disc}_{n-1}(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m)^R.$$

Если $m=n-1$, *то* $T=R=1$.

F°. *Степени дискриминантной формы относительно переменной* f_k *и полная степень при* m *равном* n, $n-1$ *и* 1 *задаются по формулам*

$$\deg_k \mathrm{disc}_n(f, \ldots, f_n) = s_1 \ldots \hat{s}_k \ldots s_n, \quad \deg \mathrm{disc}_n(f_1, \ldots, f_n) = s_1 \ldots s_n \sum_{k=1}^{n} s_k^{-1};$$

$$\deg_k \mathrm{disc}_n(f_1, \ldots, f_{n-1}) = s_1 \ldots \hat{s}_k \ldots s_{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} s_j - n + s_k \right),$$

$$\deg \mathrm{disc}_n(f, \ldots, f_{n-1}) = s_1 \ldots s_{n-1} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k - n \right) \sum_{k=1}^{n-1} s_k^{-1} + n - 1 \right];$$

$$\deg \mathrm{disc}_n f = n(s-1)^{n-1}.$$

Приведем два приложения свойств $A^\circ - F^\circ$.

Предложение 2. (I). *Для семейства из одной функции* f

$$\mathrm{disc}_n(f) = \mu \cdot \mathrm{disc}_n(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n).$$

(II) *Для семейства из* $n-1$ *функции* $f=(f_1, \ldots, f_{n-1})$

$$\mathrm{disc}_n(f) = \frac{1}{n^{s_1 \ldots s_{n-1}}} \mathrm{disc}_n(f, \Delta) \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathrm{disc}_{n-1}(f|_{x_i=0})^{-1},$$

где Δ*—определитель матрицы* n*-того порядка, составленной присоединением к якобиевой матрице* $\mathcal{J}(f)$ *первой строки* $(x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_n$, $i \in [1, n])$.

Доказательство. (II). На открытом множестве $Z_j | x_j \neq 0$, $j \in [1, n]$ $\Delta = n x_1 \ldots \hat{x}_j, \ldots x_n \Delta_j$, где Δ_j—определитель матрицы, полученной из якобиевой матрицы $\mathcal{J}(f)$ вычеркиванием j-того столбца, помноженный на $(-1)^{1+j}$. Подставляя это значение Δ в дискриминантную форму, получаем, что на $p_1(Z_j)$

$$\mathrm{disc}_n(f, \Delta_j) = \frac{1}{n^{s_1 \ldots s_{n-1}}} \mathrm{disc}_n(f, \Delta) \cdot \prod_{i \neq j} \mathrm{disc}_{n-1}(f|_{x_i=0})^{-1},$$

Из неприводимости форм $\mathrm{disc}_{n-1}(f|_{x_i=0})$, $i \in [1, n]$ следует, что все они делят форму $\mathrm{disc}_n(f, \Delta)$. Согласно E°

$$\mathrm{disc}_n f = \mathrm{disc}_n(f, \Delta_j) \cdot \mathrm{disc}_{n-1}(f|_{x_j=0})^{-1} = \frac{1}{n^{s_1 \ldots s_{n-1}}} \mathrm{disc}_n(f, \Delta) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \mathrm{disc}_{n-1}(f|_{x_i=0})^{-1}.$$

Предложение 3. (I) *Если* $f=(f_1, \ldots, f_n)$, $g=(g_1, \ldots, g_n)$*—семейства мультистепени* $s=(s_1, \ldots, s_n)$, $r=(r, \ldots, r)$, *а семейство* $f \circ g$ *получается подстановкой* g_i *вместо* x_i *в полиномы семейства* f, *то*

$$\mathrm{disc}_n(f \circ g) = \mathrm{disc}_n(f)^{r^{n-1}} \cdot \mathrm{disc}_n(g)^{s_1 \ldots s_n}.$$

(II) *Если в предыдущих обозначениях семейство f состоит из произвольного числа $m \leqslant n$ полиномов, а $r=1$, то*

$$\mathrm{disc}_n(f \circ g) = \mu \cdot \mathrm{disc}_n(f) \cdot \mathrm{disc}_n(g)^{\nu}.$$

При $m=1$ $\nu = s(s-1)^{n-1}$. *При* $m=n-1$ $\nu = s_1 \ldots s_{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k - n + 1\right)$.

Лемма 3. *Если* $\mathrm{disc}_n(g) \neq 0$, *отображение* $g: \mathrm{P}^{n-1} \to \mathrm{P}^{n-1}, x \mapsto (g_1(x): \ldots : g_n(x))$ *является конечнолистным накрытием.*

Действительно, неравенство $\mathrm{disc}_n(g) \neq 0$ эквивалентно условию регулярности отображения g. Полный прообраз точки $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, скажем, при $\xi_n \neq 0$ задается уравнениями $h_i = g_i - \alpha_i g_n = 0$, $\alpha_i = \xi_i / \xi_n$, $i \in [1, n-1]$. Если $\dim \bigcap_{i=1}^{n-1} X_{h_i} > 0$, то $\mathrm{disc}_n(h_1, \ldots, h_{n-1}, g_n) = 0$, что невозможно, так как согласно [3]

$$\mathrm{disc}_n(h_1, \ldots, h_{n-1}, g_n) = \mathrm{disc}_n(g).$$

Доказательство теоремы. При условиях (I) и (II) предложения, используя лемму 3, можно показать, что формы $\mathrm{disc}_n(f \circ g)$ и $\mathrm{disc}_n(f) \cdot \mathrm{disc}_n(g)$ имеют одинаковое множество нулей. Приравнивая степени однородности обеих частей по f и g или подставляя $g = (x_1, \ldots, x_n)$, можно получить значения показателей сомножителей $\mathrm{disc}_n(f)$ и $\mathrm{disc}_n(g)$.

Ереванский государственный
университет

Ս. Հ. ԴԱԼԱՅԱՆ

Համասեռ բազմանդամների վերջավոր ընտանիքի դիսկրիմինանտային ձևը

Մուծվում է բազմանդամների վերջավոր ընտանիքի դիսկրիմինանտային ձևի հասկացությունը և հետազոտվում են նրա հատկությունները։ Մասնավորապես, ցույց է տրվում, որ դիսկրիմինանտային ձևը սիմետրիկ կամ շեղ-սիմետրիկ ընդհանրացված բազմապատկային համասեռ ֆունկցիա է $f_1, \ldots, f_m$ բազմանդամներից։ Որպես ապացուցված հատկությունների կիրառություն ստացվում են ընտանիքների արտադրյալի դիսկրիմինանտային ձևի բանաձևը և դիսկրիմինանտային ձևի արտահայտումը $m=1$ և $n-1$ դեպքերում ռեզուլտանտի միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. П. Соколов*, Пространственные матрицы и их приложения. Физматгиз, М., 1960. [2] *Н. П. Соколов*, Введение в теорию многомерных матриц, Наукова думка, Киев, 1972. [3] *Б. Л. ван дер Варден*, Алгебра, Наука. М., 1976. [4] *Н. Барбаки*, Алгебра, гл. IV, приложение «Результант, дискриминант», Наука, М., 1965.