

УДК 517.518

МАТЕМАТИКА

Р. И. Овсепян

О некоторых новых условиях, обеспечивающих монотонность функции

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 29/XII 1983)

Всюду ниже рассматриваются вещественные функции, определенные на отрезке $[0, 1]$. D обозначает класс функций, удовлетворяющих условию Дарбу, т. е. отображающих связное множество в связное.

B_1 —первый класс Бэра. $\mathcal{A}$ —множество функций, аппроксимативно (иначе, асимптотически) непрерывных всюду. Известно ⁽¹⁾, что $\mathcal{A} \subset DB_1$ (здесь $DB_1 \equiv D \cap B_1$). $f_{ap}^-(x)$ ($f_{ap}^+(x)$; $f_{-ap}^-(x)$)—аппроксимативная (правая; левая) производная в точке x . $f_q^-(x)$ ($f_q^+(x)$; $f_{-q}^-(x)$)—производная (правая; левая) Маркуса ⁽¹⁾. Это значит, что для точки x существуют интервал Δx и некоторое множество $E \subset \Delta$ такое, что $\Delta \setminus E$ имеет первую категорию и $\lim_{t \in E; t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f_q^-(x)$

Определение 1. Функцию f назовем a -непрерывной (c -непрерывной) в точке x , если существует множество E , для которого x —двусторонняя предельная точка (двусторонняя точка конденсации) и $\lim_{t \in E; t \rightarrow x} f(t) = f(x)$.

Очевидно, что функция класса Дарбу обязана быть c -непрерывной (следовательно, и a -непрерывной) всюду. Обратное неверно: функция Дирихле или ее очевидная модификация.

Определение 2. Функцию f назовем d -непрерывной в точке x , если существует такое множество E , что для любого $\delta > 0$

$$\text{mes}\{(x - \delta, x) \cap E\} > 0, \text{mes}\{(x, x + \delta) \cap E\} > 0 \text{ и } \lim_{t \in E; t \rightarrow x} f(t) = f(x).$$

Очевидно, что d -непрерывность в точке более слабое условие, чем асимптотическая непрерывность, и более сильное, чем c -непрерывность.

Известно, что если производная функции всюду равна нулю, то эта функция—постоянная. Этот факт обобщался многими авторами ^(1,2). Приведем те результаты, к которым непосредственно примыкает наша работа.

Л. Шеффер (см. ⁽³⁾, с. 73, а также ⁽⁴⁾, с. 44) доказал, что непрерывная функция сводится к постоянной, если в каждой точке, исключая, быть может, некоторое счетное множество (и. с. м.), она имеет правостороннее производное число, равное нулю. Однако, как следует из одного результата Ярника (см. ⁽⁵⁾), существуют непостоян-

ные непрерывные функции, у которых в каждой точке существует справа или слева (в зависимости от точки) производное число, равное нулю.

В связи с теоремой Шеффера Н. Н. Лузиным был сформулирован такой вопрос (см. ⁽⁵⁾, с. 374): обязана ли быть постоянной функция, имеющая всюду конечную производную, равную нулю почти всюду (п. в.). Ответ на этот вопрос содержится в теореме Ю. Гольдовского и Л. Тонелли (см. ⁽²⁾, с. 297 и ⁽¹⁾, с. 174): если 1) f — непрерывна ($f \in C$); 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует конечная или бесконечная правосторонняя производная $f'_+ \geq -\infty$; 3) $f'_+ \geq 0$ п. в., то f монотонно возрастает ($f \uparrow$).

Нами установлено более сильное утверждение:

Теорема 1. Если 1) $f \in C$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует или $f'_{+ap}(x) (\geq -\infty)$ или $f'_{-ap}(x) (\geq -\infty)$; 3) $f'_{\pm(x)ap}(x) \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$.

Еще раз обращаем внимание на упомянутый выше результат Яриика.

В 1939 г. Г. П. Толстов (см. ⁽⁷⁾, а также ⁽¹⁾, с. 175) усилил утверждение Гольдовского—Тонелли, установив следующее: если 1) $f \in \mathcal{A}$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f'_{ap}(x) (\geq -\infty)$; 3) $f'_{ap} \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

В 1950 г. З. Загорский (см. ⁽⁸⁾, а также ⁽¹⁾, с. 175) доказал: если 1) $f \in D$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f' (\geq -\infty)$; 3) $f' \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Как видим, здесь первое условие теоремы Толстова ослаблено ($\mathcal{A} \subset D$), а второе и третье усилены. С другой стороны, как тогда же указал З. Загорский, функция, удовлетворяющая во всех трех пунктах минимальным условиям теорем Толстова и Загорского, не обязана быть монотонной. В этой связи им была высказана гипотеза ⁽⁸⁾, что справедливо такое утверждение: если 1) $f \in DB_1$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f'_{ap} (\geq -\infty)$; 3) $f'_{ap} \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Эта гипотеза Загорского получила подтверждение в 1965 г. в работах А. Брукнера и Т. Святковского (см. ⁽¹⁾, с. 175).

Наш метод, основанный на иных (категорных) соображениях (чем у Брукнера и Святковского), также позволяет доказать их теорему, которая, очевидно, содержит теорему Г. Толстова, но не включает теорему Загорского. Упомянутая выше теорема Загорского в оригинале имеет длинное и сложное доказательство, которое по существу использует условие $f \in D$.

Нами установлено более сильное утверждение (с простым и прозрачным доказательством).

Теорема 2. Если 1) f — a -непрерывна всюду; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f' (\geq -\infty)$; 3) $f' \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Точный аналог теоремы Брукнера—Святковского для производной С. Маркуса f'_a был установлен Дж. Леонардом (см. ⁽⁹⁾, а также ⁽¹⁾, с. 184). При этом он пользовался методом Брукнера.

Мы показываем, что в теореме Леонарда условие $f \in B_1$ излишне, а условие $f \in D$ можно заменить на значительно более слабое (заметим, что не так обстоит дело в случае теоремы Брукнера—Святковского: она перестает быть верной, если вместо $f \in DB_1$ предполагать лишь $f \in DB_2$). Итак, справедлива

Теорема 3. Если 1) f — c -непрерывна всюду; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f'_q (\geq -\infty)$; 3) $f'_q \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Наш метод позволяет проводить исследование и в случае односторонних производных. В этой связи заметим, что существуют непрерывные функции, обладающие всюду конечной правосторонней производной класса L^1 , у которых левосторонняя производная (даже асимптотическая) не существует на множестве мощности континуума (см. ⁽⁹⁾, а также ⁽¹⁾, с. 64).

Теорема 4. Если 1) $f \in DB_1$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует конечная $f'_{+ap}(x)$ или $f'_{-ap}(x)$; 3) $f'_{\pm(x)ap}(x) \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Как показывает пример Крофта (см. ⁽¹⁾, с. 12), условие конечности $f'_{\pm ap}$ в теореме 4 опустить нельзя. Но это можно делать, если функция непрерывная: теорема 1 настоящей заметки.

Теорема 5. Если 1) f — c -непрерывна всюду; 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует конечная $f'_{+ap} \in L^1$; 3) $f'_{+ap} \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Опустить условие суммируемости нельзя, даже если $f \in DB_2$.

Теорема 6. Если 1) f — a -непрерывна всюду; 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует конечная f'_* ; 3) $f'_* \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Как показал Леонард (см. ⁽⁹⁾, а также ⁽¹⁾, с. 187), условие конечности f'_* можно опустить, если $f \in DB_1$ (и, как оказывается, при $f \in DB_2$ этого делать уже нельзя).

Теорема 7. Если 1) $f \in \mathcal{A}$; 2) $\forall x$ (и. с. м.) $\exists f'_{+q} (\geq -\infty)$, которая конечна п. в.; 3) $f'_{+q} \geq 0$ п. в., то $f \uparrow$ и $f \in C$.

Это утверждение дополняет теорему 3.

Рядом авторов (см., например, ⁽¹⁰⁻¹²⁾) исследовался вопрос: в какой мере аппроксимативная производная обобщает обычную производную. Так, А. Хинчин установил (см. ⁽¹⁾, с. 157), что если всюду существует конечная f'_{ap} , для которой выполняется неравенство $f'_{ap}(x) \leq \Phi'(x)$ (или $f'_{ap}(x) \geq \Phi'(x)$) при какой-либо Φ , то всюду $f'_{ap}(x) = f'(x)$. Это так, например, если f'_{ap} — ограничена (и, как легко убедиться, не так, даже если $f'_{ap} \in L^1$). С другой стороны, непрерывная функция может быть асимптотически дифференцируемой почти всюду и нигде в обычном смысле (см. ⁽⁹⁾, с. 448)*. Как будет видно из теоремы 10, в таком примере множество, где не существует f'_{ap} , обязано быть второй категории.

Г. Толстов показал (см. ⁽¹⁰⁾, а также ⁽¹⁾, с. 157), что если 1) $f \in \mathcal{A}$; 2) всюду существует $f'_{ap} (\geq -\infty)$, то на некотором всюду плотном открытом множестве f'_{ap} является производной (однако множество, где нет производной, может быть положительной меры, даже если f'_{ap} всюду конечна). Нами установлено, что условие $f \in \mathcal{A}$ в теореме Толстова излишне.

* Любопытно, что если непрерывная функция нигде не имеет правосторонней производной, то в бесконечном количестве точек она обязана быть асимптотически дифференцируемой (см. ⁽⁹⁾, с. 364).

Теорема 8. Если всюду существует $f_{ар} (\geq -\infty)$, то на некотором всюду плотном открытом множестве $f_{ар} = f'$.

Пример Крофта показывает, что в теореме 8 заменить $f_{ар}$ на $f_{+ар}$ нельзя, даже если $f \in DB_1$.

Теорема 9. Если 1) $f \in \mathcal{A}$; 2) вне некоторого множества первой категории и нулевой меры существует $f_{ар} (\geq -\infty)$, то на некотором всюду плотном открытом множестве существует f' .

Пример Крофта показывает, что в теореме 9 условие $f \in \mathcal{A}$ нельзя ослабить до $f \in DB_1$ (при этом f может стать недифференцируемой даже всюду). С другой стороны, утверждение теоремы 9 сохраняет силу, если условие $f \in \mathcal{A}$ заменить на d -непрерывность всюду (или на c -непрерывность всюду, но исключительное множество уже должно быть не более, чем счетным).

Теорема 10. Если 1) $f \in \mathcal{C}$; 2) вне некоторого множества первой категории существует $f_{ар} (\geq -\infty)$, то на некотором всюду плотном открытом множестве существует f' .

Теорема 11. Если 1) f — c -непрерывна всюду; 2) $\forall x$ (и. с. м.) существует конечная $f'_{+ар} \in L^1$, то f —абсолютно непрерывна и, следовательно, почти всюду существует производная.

Условие конечности $f'_{+ар}$ опустить нельзя, ибо, как известно (см., например, (6), с. 392), существуют непрерывные, но не абсолютно непрерывные функции, производная (быть может, бесконечная) которых существует всюду и суммируема. Заметим еще, что можно построить непрерывную функцию, у которой всюду существует асимптотическая производная (возможно, бесконечная) класса L^1 , однако множество недифференцируемости имеет положительную меру.

Ясно, что теорема 11 является обобщением известной теоремы А. Лебега, где речь идет о непрерывной функции и обычной производной. В этой связи заметим, что множество недифференцируемости функции f из теоремы 11 может иметь мощность континуума, даже если всюду существует конечная $f'_{ар} \in L^1$.

Отметим еще одно утверждение подобного рода: если $F(x)$ всюду имеет конечную аппроксимативную производную, интегрируемую по Данжуа (в широком смысле), то $F(x)$ является неопределенным интегралом Данжуа своей производной $F'_{ар}$.

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Լ. Ի. ՀՈՎՍԵԲՅԱՆ

Ֆունկցիայի մոնոտոնությունը ապահովող որոշ նոր պայմանների մասին

Աշխատանքում բերված պնդումները ընդհանրացնում են այլ հեղինակների պատկանող որոշ թեորեմներ ֆունկցիայի մոնոտոնության վերաբերյալ:

Օրինակ՝ եթե անընդհատ ֆունկցիան յուրաքանչյուր կետում բացառու-

Ինչպե՞ս գուցե մի հաշվելի բազմություն ունի աջակողմյան f_{+0} կամ ձախակողմյան f_{-0} ասիմպտոտիկ ածանցյալ (վերջավոր կամ անվերջ) և այն ոչ բացասական է համարյա ամենուրեք, ապա այդ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է (թեորեմ 1): Այս պնդումը ընդհանրացնում է Գ. Գոլդսկու և Լ. Տոնելիի թեորեմը, որտեղ խոսքը գնում է աջակողմյան սովորական ածանցյալի մասին:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ A. Bruckner, Differentiation of Real Functions, Lecture Notes in Mathematics, 659 (1978). ² С. Сакс, Теория интеграла, ИЛ, М., 1949. ³ А. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных функций, Гос. технико-теоретическое изд-во, М., 1934. ⁴ А. Карман, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, Мир, М. 1971. ⁵ V. Jarník, Fund. Math., v. 21 (1933). ⁶ Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, Гос. изд-во технико-теоретической литературы, М.—Л., 1951. ⁷ G. Tolstoff, Mat. сб., т. 5 №3 (1939). ⁸ Z. Zahorski, TAMS, v. 69 (1950). ⁹ J. Leonard, Rev. Roum. Math. Pures Appl., v. 17, №5 (1972). ¹⁰ G. Tolstoff, Mat., сб. т. 4, №3 (1938). ¹¹ R. J. O'Malley, C. E. Well, TAMS, v. 234, №2 (1977). ¹² L. Zajíček, Comment. math. Univ. carol., v. 22, №3 (1981).