

МАТЕМАТИКА

УДК 512.55

Г. Г. Эмин

Модули и строгие радикалы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 15/XII 1983)

В. А. Андрунакиевич и Ю. М. Рябухин в ⁽¹⁾ предложили метод, с помощью которого в категории ассоциативных колец As радикалы в смысле Куроша—Амицура можно описывать на языке модулей. Л. А. Скорняков в ⁽²⁾ обобщил этот метод для случая бикатегорий. Оказалось, что пользуясь тем же методом, на языке модулей можно описывать строгие, а также сильно наследственные строгие радикалы (см. ⁽³⁾) категории As .

Пусть U —произвольное ассоциативное кольцо. Под U -модулем будем понимать правый U -модуль. Аннулятором U -модуля A называется множество $(O:A)_U = \{u|u \in U, A \cdot u = O\}$. Если $(O:A)_U = O$, то A —точный U -модуль, если же $A \cdot U = O$, то A —тривиальный U -модуль. Пусть Σ_U —произвольный класс U -модулей. Ядром класса Σ_U называется пересечение $Ker \Sigma_U = \bigcap \{(O:A)_U | A \in \Sigma_U\}$. Если $\Sigma_U = \emptyset$, то, как обычно, считаем $Ker \Sigma_U = U$. Если же $Ker \Sigma_U = O$, то класс называется точным. Известно следующее.

Предложение 1. Пусть U —произвольное кольцо, V —идеал кольца U . Если A является U/V -модулем, то при композиции $a \cdot u = a \cdot (u+V)$ A становится U -модулем, причем $V \subseteq (O:A)_U$. Обратно, если A есть U -модуль и идеал $V \subseteq (O:A)_U$, то при композиции $a(u+V) = a \cdot u$ A становится U/V -модулем. Всякий подмодуль U/V -модуля A есть подмодуль U -модуля A и обратно.

Каждому кольцу U поставим в соответствие некоторый класс Σ_U нетривиальных U -модулей (может быть и пустой), и пусть Σ —класс всех Σ_U , где U пробегает класс ассоциативных колец.

Учитывая предложение 1, дадим такое

Определение 1. Класс Σ назовем строго общим классом модулей, если выполнены следующие условия:

P1. Из $A \in \Sigma_{U/V}$ следует $A \in \Sigma_U$;

P2. Из $A \in \Sigma_U$ следует $A \in \Sigma_{U/V}$, если $V \subseteq (O:A)_U$;

P3*. Если класс Σ_U точен, то $\Sigma_V \neq \emptyset$ для любого ненулевого подкольца V кольца U ;

P4. Если $\Sigma_V \neq \emptyset$ для любого ненулевого идеала V кольца U , то класс Σ_U точен.

Очевидно, что строго общий класс модулей является общим классом модулей (см. ⁽¹⁾), поэтому мы можем рассмотреть Σ -радикал. Напомним определения.

Пусть Σ —общий класс модулей. Σ -радикалом $R(\Sigma, U)$ кольца U назовем ядро $\text{Ker } \Sigma_U$ класса Σ_U , т. е. $R(\Sigma, U) = \text{Ker } \Sigma_U$. Если $\Sigma_U = \emptyset$, то кольцо U назовем Σ -радикальным. Если класс Σ_U точен, т. е. $R(\Sigma, U) = 0$, то кольцо U назовем Σ -полупростым.

Под радикалом будем понимать некоторый радикал в смысле Куроша—Амицура. Радикал R категории As называется строгим, если для любого кольца U любое R -подкольцо кольца U содержится в R -радикале $R(U)$.

Теорема 1. Пусть Σ —строго общий класс модулей. Тогда Σ -радикал является строгим радикалом. Обратно, если Σ —такой общий класс модулей, что Σ -радикал является строгим радикалом, то Σ —строго общий класс модулей. Для любого строгого радикала R существует такой строго общий класс Σ -модулей, что R совпадает с Σ -радикалом.

Доказательство. Пусть V — Σ -радикальное подкольцо кольца U . Покажем, что $V \subseteq R(\Sigma, U)$. Предположим обратное, $V \not\subseteq R(\Sigma, U)$. Тогда кольцо $\bar{V} = V/V \cap R(\Sigma, U) \cong V + R(\Sigma, U)/R(\Sigma, U)$ является ненулевым подкольцом кольца $\bar{U} = U/R(\Sigma, U)$, для которого выполнено условие: $\Sigma \bar{V}$ —точный класс (см. ⁽¹⁾), следствие 1). Из условия $P3^*$ следует, что $\Sigma \bar{V} \neq \emptyset$. Значит и $\Sigma V \neq \emptyset$, в силу условия $P1$. Получили противоречие с тем, что V — Σ -радикальное кольцо. Значит, $V \subseteq R(\Sigma, U)$.

Обратно, пусть Σ —такой общий класс модулей, что Σ -радикал является строгим. Предположим, что условие $P3^*$ не выполнено и, значит, существует такое ненулевое подкольцо V Σ -полупростого кольца U , что $\Sigma V = \emptyset$. Поскольку V — Σ -радикальное подкольцо кольца U и Σ -радикал является строгим, то ненулевое подкольцо V должно лежать в радикале $R(\Sigma, U) = 0$. Получили противоречие, которое показывает, что условие $P3^*$ выполнено.

Осталось доказать последнее утверждение теоремы.

Пусть R —произвольный строгий радикал. Тогда существует (⁽¹⁾, теорема 1) такой общий класс Σ , что R совпадает с Σ -радикалом. Поскольку R —строгий радикал, то Σ -радикал также является строгим. Значит, в силу первой части этой теоремы Σ —строго общий класс модулей. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть r —произвольный радикал в категории абелевых групп Ab . Тогда по этому радикалу r можно построить строгий радикал r^* в категории As , определенный по следующему правилу: $[r^*(U)]^+ = r(U^+)$, где U —произвольное кольцо и U^+ —аддитивная группа кольца U (см. ⁽⁴⁾). Каждому кольцу U поставим в соответствие класс Σ'_U всех таких нетривиальных U -модулей A , что фактор-группа $U^+ / [(0:A)_U]^+$ является r -полупростой группой. Пусть Σ' —класс всех Σ'_U , где U пробегает класс ассоциативных колец. Тогда в силу теоремы 1 и доказательства теоремы 1 работы (⁽¹⁾) Σ' —строго общий класс модулей.

Замечание 2. Теорема 1 дает возможность изложить описание строгих радикалов в категории модулей над всеми кольцами, используя лишь язык модулей. А именно, с помощью систем $\{\Sigma;$

$Ker \sum, \{U \in As\}$, удовлетворяющих условиям (R1)–(R3) работы (5), где Σ — строго общие классы модулей.

Напомним, что строгий радикал R категории As называется сильно наследственным строгим радикалом, если всякое подкольцо R -радикального кольца является R -радикальным. В работе (3) показано, что радикал R является сильно наследственным строгим тогда и только тогда, когда для всякого подкольца V любого кольца U справедливо равенство $R(V) = V \cap R(U)$. Но в таком случае вполне аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что верна

Теорема 2. Пусть Σ — такой класс модулей, для которых выполнены условия P1, P2 и

P5*. Для любого подкольца V кольца U справедливо равенство $Ker \sum_V = V \cap Ker \sum_U$.

Тогда Σ является строго общим классом модулей, причем Σ -радикал является сильно наследственным строгим радикалом. Обратно, если Σ — такой общий класс модулей, что Σ -радикал является сильно наследственным строгим радикалом, то условие P5* выполнено. Для любого сильно наследственного строгого радикала R существует такой общий класс Σ -модулей, удовлетворяющих условию P5*, что R совпадает с Σ -радикалом.

Замечание 3. Известно (6), что сильно наследственные строгие радикалы категории ассоциативных колец описываются с помощью наборов простых чисел $\Pi = (p_1, \dots, p_k, \dots)$. Сильно наследственный строгий радикал категории As , определенный набором простых чисел Π , будем обозначать R_Π . Поставим в соответствие каждому кольцу U класс $\sum_U^\Pi$ всех таких нетривиальных U -модулей A , что фактор-кольцо $U/(O:A)_U$ является R_Π -полупростым кольцом, т. е. из $u \in (O:A)_U$ следует, что $u \in (O:A)_U$, $u \in U$, $n - \Pi$ -число. Пусть Σ^Π — класс всех $\sum_U^\Pi$, где U пробегает класс ассоциативных колец. Получили, что классы модулей Σ , для которых выполнены условия P1, P2 и P5*, — это в точности всевозможные Σ^Π для всевозможных наборов простых чисел Π .

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Գ. Գ. ԷՄԻ

Մոդուլներ և խիստ ռադիկալներ

Վ. Ա. Անդրոնյանիկիչը և Յու. Մ. Ռյարուխինը առաջարկել էին մի մեթոդ, որի օգնությամբ ասոցիատիվ օղակների ռադիկալները կարելի է նկարագրել մոդուլների լեզվով: Պարզվում է, որ օգտվելով այդ մեթոդից կարելի է նկարագրել ոչ միայն ռադիկալները, այլ նաև խիստ, ինչպես նաև ուժեղ ժառանգական խիստ ռադիկալները: Վերը նշված նկարագրությունները արվում են մոդուլների խիստ ընդհանուր դասերի միջոցով: Դա հնարավորություն է տալիս բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի խիստ ռադիկալները, ինչպես նաև ուժեղ ժառանգական խիստ ռադիկալները նկարա-

գրել $\{\Sigma; R_R(\Sigma, U) | U \in As\}$ տիպի խիստ ուղղակիների համաձայնեցված սխեմաների միջոցով (տես՝ ⁵), որտեղ Σ -ները՝ դրանք մոդուլների խիստ ընդհանուր դասեր են: Այսպիսով, բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում էլ խիստ և ուժեղ ժառանգական խիստ ուղղակիները հնարավոր է նկարագրել միմիայն մոդուլների օգնությամբ: Բացի այդ, հայտնաբերված են մոդուլների ընդհանուր դասերի հետաքրքրություն ներկայացնող նոր օրինակներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. А. Андрукиевич, Ю. М. Рябухин, ДАН СССР. т. 156, № 5 (1964). ² L. A. Skornjakov, in: Universale Algebren und Theorie der Radikale, Akademie—Verlag, Berlin, 1976. ³ E. Г. Шлызгейфер, Тр. ММО, т. 19 (1968). ⁴ B. J. Gardner, Acta Math. Acad. Sci. Hung., v. 24, № 3—4 (1973). ⁵ Г. Г. Эмин, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 14, № 3 (1979). ⁶ P. N. Stewart, Proc. Amer. Math. Soc., v. 39, № 2 (1973).