ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXX 1985 5

УДК 681.513

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

С. В. Шахвердян

О необходимых условиях оптимальности для дискретных систем

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Т. Адонцем 13/XII 1983)

Не вдаваясь в историю развития теории оптимизации дискретных систем, отметим, что начиная с 60-х гг. велась большая дискуссия вокруг необходимых условий оптимальности для дискретных систем вообще и возможности перенесения принципа максимума в особенности [1-8], которая по существу завершилась утверждением о том, что аналог непрерывного принципа максимума для дискретных систем в общем случае несправедлив [1-3]. В доказательство приводятся специально сконструированные примеры, для которых принцип максимума не имеет места. Стало быть, для дискретных систем надо иметь другие условия оптимальности. В качестве таковых в [1,2] предлагается теорема о неположительности дифференциала функции Гамильтона H по допустимым вариациям δu^* на оптимальной траектории, т. е. если u^*—оптимальное управление, то имеет место неравенство $\delta_u H(u^*)\leqslant 0$. При этом $\delta_u H(u^*)$ справедливо вычисляется при фиксированном сопряженном векторе ψ.

Сам факт вычисления $\delta_u H(u^*)$ при фиксировании ψ говорит о том, что в общем случае на оптимальной траектории функция H не должна быть максимальной, так как сопряженный вектор ψ, входящий в функцию H, определяется из сопряженной системы, которая содержит в себе управляющий параметр. По-видимому, это утверждение справедливо и для непрерывных систем, поскольку оно никак не обусловлено дискретностью времени. Это можно доказать на примере задач со скользящим режимом при ограничении на полное изменение управления.

В силу этого, во-первых, поиск оптимального управления из условия $\max H$ по $u\in U$ (стержневое соотношение принципа максимума) может быть организован только с помощью градиента функции H при фиксированном ψ, где U—замкнутое ограниченное множество размерности u, так как справедливо только условие $\delta_u H(u^*)\leqslant 0$ и только при фиксированном ψ.

Во-вторых, проводить проверку управляемого процесса на оптимальность по поведению функции H неправомочно, поскольку не функция H должна быть максимальной на оптимальной траектории.

В-третьих, необходимые условия оптимальности второго порядка, по-видимому, должны быть составлены не для функции H, а для другой функции, вместе с которой в частном случае и функция Гамильтона может быть максимальной.

Необходимые условия оптимальности в форме, аналогичной теореме о неположительности дифференциала функции H, приводятся в ([5–9]). В некоторых работах показывается неправомерность пренебрежения членами второго порядка малости ([7,8]). В частности в ([8]) на этой основе был предложен принцип квазимаксимума.

Учет членов второго порядка малости вряд ли окажется существенным в проблеме необходимых условий оптимальности для дискретных систем.

Ниже предлагаются новые необходимые условия оптимальности для дискретных систем для общего случая.

Необходимые условия оптимальности. Рассмотрим дискретный управляемый объект, описываемый уравнением вида

$$x(i+1)=f(x(i),\ u(i)),\quad i=\overline{0,\ s-1} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$x(0)=x^0,\quad x(s)=x^s, \tag{2}$$

где $x(i)=(x_1(i),\ \ldots,\ x_n(i))$—$n$-мерный фазовый вектор; $u(i)=(u_1(i),\ \ldots,\ u_m(i))$—$m$-мерный вектор управления; $f=(f_1,\ \ldots,\ f_n)$—n-мерная вектор-функция; s—целое число, определяющее длительность управляемого процесса; x^0, x^s—n-мерные заданные векторы.

Требуется минимизировать сумму

$$J=\sum_{i=0}^{s-1} F(x(i),\ u(i)) \tag{3}$$

по $u(i)$, $i=\overline{0,\ s-1}$ при ограничениях (1), (2) и

$$u(i)\in U(i),\quad i=\overline{0,\ s-1} \tag{4}$$

Функции F и $f_j(x(i),\ u(i))$, $j=\overline{1,\ n}$, предполагаются непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми по $x(i)$, $u(i)$ на $X\times U(i)$, где $X=E^n$; E^n—n-мерное вещественное евклидово пространство; $U(i)$—допустимая область изменения управления.

Обозначим

$$x_0(i)=\sum_{k=0}^{i-1} F(x(k),\ u(k)),$$

тогда справедливо

$$x_0(i+1)=x_0(i)+F(x(i),\ u(i))\equiv f_0(\bar{x}(i),\ u(i)),$$
$$x_0(0)=0,\quad x_0(s)=J,$$

где $\bar{x}=(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$.

В силу этого состояние процесса на на i-ом шаге описывается системой уравнений

$$\bar{x}(i+1)=\bar{f}(\bar{x}((i),\ u(i)),$$
$$\bar{x}(0)=(0,\ x(0)),\quad \bar{x}(s)=(J,\ x(s)), \tag{5}$$

где $$\bar{f}=(f_0, f_1, \ldots, f_n).$$

Тогда задачу (1)—(4) можно сформулировать следующим образом. Требуется найти такое допустимое управление, которое минимизирует

$$\Phi(\bar{x}(s))=\sum_{j=0}^{n}\mu_j d_j \tag{6}$$

при ограничениях (4) и (5), где $\mu_0=-1$, $d_0=x_0(s)$, $d_j=x_j(s)-x_j^*$; μ_j— множители, $j=\overline{1, n}$.

Для решения задачи (4)—(6) введем сопряженные переменные ψ_j, $j=\overline{0, n}$ и с их помощью составим функцию Гамильтона

$$H(\psi(i+1),\ x(i),\ u(i))=\sum_{j=0}^{n}\psi_j(i+1)\bar{f}(\bar{x}(i),\ u(i)), \tag{7}$$

где $\psi_j(i)$ определяется из следующей системы уравнений:

$$\psi_0=-1,\ \psi_j(i)=\frac{\partial H(\psi(i+1),\ \bar{x}(i),\ u(i))}{\partial x_j(i)},\quad j=\overline{1, n} \tag{8}$$

с граничным условием

$$\psi_j(s)=\frac{\partial\Phi(\bar{x}(s))}{\partial x_j(s)},\quad j=\overline{1, n}. \tag{9}$$

Утверждение. Пусть $u^*(i)$—оптимальное управление, $\bar{x}^*(i)$ —соответствующая ему при заданном $\bar{x}(0)=(0, x^0)$ траектория. Тогда справедливо неравенство

$$H^0(\psi^*(i+1,\ \bar{x}^*(i),\ u^*(i))\geqslant H^0(\psi(i+1),\ \bar{x}^*(i),\ u(i)) \tag{10}$$

для всех $u(i)\in U(i)$, где значения ψ^* находятся из систем (8) и (9) при u^* и $\bar{x}^*$; $\psi(i+1)=\psi^*(i+1)+\Delta\psi^*(i+1)$, $H^0=H-A$,

$$A\equiv\sum_{r=1}^{m}\int_0^{u_r}\frac{\partial H}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial v_r}dv_r,\quad \Delta\psi^*(i+1)\equiv\frac{\partial^2 H}{\partial u\partial\bar{x}}\Delta u^*(i).$$

Доказательство. Приращение вектора $\bar{x}^*(i+1)$ при специальной допустимой вариации управления вида

$$\Delta u^*(i)=u(i)-u^*(i)\neq 0,\quad \Delta u^*(j)=0,\quad j=\overline{0, s-1},\quad j\neq i$$

можно представить так:

$$\Delta\bar{x}^*(i+1)=\bar{f}(\bar{x}^*(i),\ u^*(i)+\Delta u^*(i))-\bar{f}(\bar{x}^*(i),\ u^*(i)). \tag{11}$$

Тогда согласно (7) и (11) из известного неравенства $\langle\psi^*(i+1)$, $\Delta\bar{x}^*(i+1)\rangle\leqslant 0$(²) следует

$$\langle\psi^*(i+1),\ \bar{f}(\bar{x}^*(i),\ u^*(i)+\Delta u^*(i))-\bar{f}(\bar{x}^*(i),\ u^*(i))\rangle\leqslant 0$$

или

$$H(\psi(i+1),\ \bar{x}^*(i),\ u^*(i)+\Delta u^*(i))-\frac{\partial H}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u^*(i)-$$
$$-H(\psi^*(i+1),\ \bar{x}^*(i),\ u^*(i))\leqslant 0,$$

откуда с учетом равенства

$$\frac{\partial H}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial u^r}\Delta u_r^* = \int\limits_0^{u_r}\frac{\partial H}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial v_r}\,dv_r - \int\limits_0^{u_r^*}\frac{\partial H}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial v_r}\,dv_r + 0(\|\Delta u_r^*\|)$$

получим (с точностью до $\sum\limits_{r=1}^{m} 0(\|\Delta u_r^*\|)$) неравенство (10), где $<\ldots>$ — скалярное произведение в E^{n+1}, $r=\overline{1, m}$. Утверждение доказано.

Из неравенства (10) следует, что в общем случае на оптимальной траектории не функция Гамильтона должна быть максимальной, а функция H^0, одновременно с которой для некоторого класса задач и функция Гамильтона должна быть максимальной. Этот класс определен задачами с выпуклым множеством достижимости процесса (1) (доказательство справедливости принципа максимума для задач с выпуклым множеством достижимости дано в ([2])). Функцию H^0 можно назвать неполным гамильтонианом.

Аналогичное утверждение можно доказать и для непрерывных систем, т. е. доказать, что в общем случае на оптимальном управлении максимальной должна быть не функция Гамильтона, а непрерывный аналог функции H^0.

Пример. Пусть дискретный процесс описывается системой уравнений

$$x_1(i+1) = x_1(i) + 2u(i);$$

$$x_2(i+1) = x_2(i) - x_1^2(i) + u^2(i);$$

$$x_1(0)=3, \ x_2(0)=0, \ i=0, 1.$$

Требуется найти управление $u(i)$, $i=0, 1$, доставляющее максимум $J=x_2(2)$ при ограничении $|u(i)|\leqslant 5$. Правый конец x_1 свободен. Этот пример взят из ([2]), где на нем четко доказывается, что на оптимальном управлении принцип максимума не имеет места (этот пример рассмотрен и в ([3])).

Для этой задачи показатель качества имеет вид

$$J = -3u^2(0) - 12u(0) + u^2(1) - 18,$$

откуда оптимальное управление равно $u^*(0)=-2$, $u^*(1)=\pm 5$. При оптимальном управлении $\psi_1^*(1)=2$, $\psi_1^*(2)=0$, $\psi_2^*(1)=\psi_2^*(2)=1$, а функция Гамильтона определяется следующим образом ([2]):

$$H(u(0)) = u^2(0) + 4u(0) - 3,$$

$$H(u(1)) = u^2(1) - 6.$$

Из выражения для $H(u(0))$ видно, что при $u^*(0)=-2$ функция Гамильтона принимает минимальное значение.

Определим теперь функцию $H^0(u(0))$, принимая $\psi_2(1)=\psi_2(2)=1$,

$$H^0(u(0)) = u^2(0) - 9 + \psi_1(1)(3+2u(0)) - A(0).$$

Так как

$$A=\int\limits_0^{u(0)} \frac{\partial H(v(0))}{\partial \psi_1(1)} \frac{\partial \psi_1(1)}{\partial v(0)} dv(0) = -(4u^2(0)+12 \cdot u(0)),$$

то

$$H^0(u(0)) = -3u^2(0) - 12u(0) - 27.$$

Как видно, функция $H^0(u(0))$ с точностью до постоянной совпадает с J и при $u^*(0) = -2$ достигает максимума. При $i=1$ $H(u(1)) = H^0(u(1))$, поэтому решение $u^*(1) = \pm 5$ доставляет максимум обеим функциям.

Филиал ВНИИАЭС

Ս. Վ. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ

Դիսկրետ համակարգերի համար օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանների մասին

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ օպտիմալ կառավարման դեպքում մեծագույնը պետք է լինի ոչ թե Համիլտոնի H ֆունկցիան, այլ $H^0 = H - A$ թերի համիլտոնյանը, որտեղ՝

$$A=\sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^{u_r} \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial v_r} dv_r$$

Բերվում են ընդհանուր դեպքի համար դիսկրետ համակարգերի օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները։ Դիտվում է օրինակ, որի վրա ցույց է տրվում, որ օպտիմալ ղեկավարման դեպքում մեծագույն արժեքի է հասնում H^0-ն։ Այդ դեպքում Համիլտոնի ֆունկցիան ընդունում է փոքրագույն արժեք։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Г. Болтянский,* Оптимальное управление дискретными системами, Наука, М., 1973. [2] *А. И. Пропой,* Элементы теории оптимальных дискретных процессов, Наука, М., 1973. [3] *Р. Габасов,* ЖВМ и МФ, т. 8, № 4 (1968). [4] *B. K. Jordan, E. Polak,* Electronics and Control, v. 17, №6 (1964). [5] *Ш. С. Л Чанг,* Синтез оптимальных систем автоматического управления, Машиностроение, М., 1965. [6] *Фан Вань.* Дискретный принцип максимума, Мир, М., 1967. [7] *F. Horn, R. Jackson,* Int. J. Control, v. 1, №4 (1965). [8] *Р. Габасов, Ф. М. Кириллова,* Автоматика и телемеханика, №11, 1966.