ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 5

МАТЕМАТИКА

УДК 515.1

Э. А. Мирзаханян

О свойствах терминальных чисел линейных ограниченных операторов, принадлежащих одному классу отображений подмножеств гильбертова пространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/XII 1983)

В статье приводятся некоторые свойства линейных ограниченных операторов и их терминальных чисел, принадлежащих классу K_0 непрерывных отображений $f: M \to H$ подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства H.

Определение и ряд других свойств отображений класса K_0 содержатся в ([1]). Ряд других свойств отображений класса K_0 приведены в ([2,3]).

Приведем (упрощенное) определение класса K_0.

Пусть G—открытое подмножество пространства H и $f: G \to H$—непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f принадлежит классу K_0, если выполнены следующие условия:

1) f локально удовлетворяет условию Липшица, т. е. для всякой $x_0 \in G$ существуют такие числа $r>0$ и $c>0$, что при $x, y \in G$, $\|x-x_0\|<r$, $\|y-x_0\|<r$ выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant c\|x-y\|;$$

2) для любой точки $x_0 \in G$ и любого числа $\varepsilon>0$ существуют окрестность $U \subseteq G$ точки x_0 в H, конечномерное подпространство $L \subseteq H$ и действительное число λ такие, что если $x, y \in U$ и вектор $x-y$ ортогонален подпространству L, то выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\lambda(x-y)\| \leqslant \varepsilon\|x-y\|.$$

Фигурирующее в приведенном определении действительное число λ можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой x_0 и было пригодно для любого числа $\varepsilon>0$. В этом случае число λ однозначно определяется точкой $x_0 \in G$. Получающаяся таким образом действительная функция $\lambda(x)=\lambda_f(x)$, заданная на G, непрерывна и единственна; она называется терминальной производной отображения f.

Терминальная производная $\lambda_f(x)$ линейного ограниченного оператора $f: H \to H$, принадлежащего классу K_0, является постоянной функцией на всем H; общее значение этой функции называется терминальным числом оператора f и обозначается через λ_f.

Пусть теперь M — произвольное подмножество пространства H и $f: M \to H$ — непрерывное отображение; будем говорить, что отображение f принадлежит классу K_0, если существуют открытое в H подмножество $G \supseteq M$ и непрерывное отображение $g: G \to H$ такое, что $g \in K_0$ и $g(x) = f(x)$ для каждой точки $x \in M$.

Приведем теперь некоторые свойства принадлежащих классу K_0 линейных ограниченных операторов $f: H \to H$ и их терминальных чисел.

П р е д л о ж е н и е 1. Линейный ограниченный оператор $f: H \to H$ принадлежит классу K_0 в том и только том случае, когда выполнено следующее условие: существует действительное число λ, обладающее тем свойством, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое конечномерное подпространство $L \subseteq H$, что

$$\|\tilde{f} - \lambda I\| \leqslant \varepsilon, \text{ где } \tilde{f} = f|(H \ominus L).$$

П р е д л о ж е н и е 2. Если линейный ограниченный оператор $f: H \to H$ принадлежит классу K_0, то и сопряженный к нему оператор $f^*: H \to H$ принадлежит K_0, причем $\lambda_f = \lambda_{f^*}$.

П р е д л о ж е н и е 3. Терминальное число λ_f линейного ограниченного оператора $f: H \to H$, принадлежащего классу K_0, является точкой спектра оператора f.

С л е д с т в и е 1. *Терминальное число $\lambda = \lambda_f$ линейного ограниченного оператора $f: H \to H$ является собственным значением оператора $f: H \to H$ тогда и только тогда, когда оператор $f_\lambda = f - \lambda I$ не инъективен.*

С л е д с т в и е 2. *Спектр всякого линейного ограниченного оператора $f: H \to H$, принадлежащего классу K_0, не пуст.*

П р е д л о ж е н и е 4. Пусть $f: H \to H$ — линейный ограниченный оператор и λ некоторое его собственное значение. Тогда, если собственное подпространство $\tilde{H}$ оператора f, соответствующее собственному значению λ, имеет конечный дефект относительно H, то оператор f принадлежит классу K_0 и его терминальное число λ_f совпадает с λ.

Из предложения 4 вытекают следующие важные факты.

П р е д л о ж е н и е 5. Пусть $f: H \to H$ — линейный ограниченный оператор, тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $f \in K_0$ и терминальное число λ_f не является собственным значением для f, то у оператора f не может существовать собственного значения λ, для которого соответствующее собственное подпространство имело бы конечный дефект в H;

б) если f не принадлежит классу K_0, то f не обладает собственным значением λ, для которого соответствующее собственное подпространство имеет конечный дефект в H.

П р е д л о ж е н и е 6. Если терминальное число λ_f линейного ограниченного оператора $f: H \to H$ отлично от нуля, то ядро $Ker\, f$ этого оператора является конечномерным подпространством пространства H.

С л е д с т в и е 3. *Если линейный ограниченный оператор*

$f: H \to H$ принадлежит классу K_0 и его ядро $\operatorname{Ker} f$ бесконечномерно, то терминальное число λ_f оператора f равно нулю.

Предложение 7. Пусть G—открытое подмножество пространства H, $f: G \to H$—непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда, если для каждой точки $x \in G$ производная f_x принадлежит классу K_0, то f принадлежит классу K_0, причем для каждой точки $x \in G$ имеет место равенство $\lambda_f(x) = \lambda f_x$.

Следствие 4. *Всякий непрерывно дифференцируемый вполне непрерывный оператор $f: H \to H$ принадлежит классу K_0, причем его терминальная производная $\lambda_f(x)$ тождественно равна нулю на H.*

Ереванский государственный университет

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների արտապատկերումների մի դասին պատկանող գծային սահմանափակ օպերատորների թերմինալ թվերի հատկությունների մասին

Հոդվածում բերվում են իրական սեպարաբել H հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների $f: M \to H$ անընդհատ արտապատկերումների K_0 դասին պատկանող գծային սահմանափակ օպերատորների և նրանց թերմինալ թվերի մի քանի հատկություններ։ Մասնավորապես, պարզվում է, որ K_0 դասին պատկանող յուրաքանչյուր գծային սահմանափակ օպերատորի թերմինալ թիվը պատկանում է այդ օպերատորի սպեկտրին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Г. Болтянский*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, № 2 (1974). [2] *В. Г. Болтянский, Э. А. Мирзаханян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, № 5 (1974). [3] *Э. А. Мирзаханян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 15, № 5 (1980).