ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 5

УДК 519.248 : 531.9

МАТЕМАТИКА

В. А. Арзуманян, Б. С. Нахапетян, С. К. Погосян

Кластерные свойства решетчатых систем с непрерывным спином

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 16/XII 1983)

0°. В настоящей заметке рассматриваются кластерные свойства корреляционных функций для классических решетчатых систем с непрерывным спином и многочастичным взаимодействием при обычных ограничениях на потенциал. Корреляционные функции, уравнения и соответствующие оценки для классических дискретных систем с общим взаимодействием и одноточечным пространством спинов впервые были рассмотрены в известной работе ([1]). Основным результатом нашей заметки (теорема п. 2) являются аналогичные оценки для решетчатых систем с непрерывным спином. Используемая техника представляет собой модификацию известного алгебраического метода (см. например ([1, 2])). Корреляционные функции и уравнения для дискретных моделей с произвольным спином были введены и изучены в работе ([3]).

Было бы интересно изучение кластерных свойств произвольных маркированных систем (классический непрерывный случай рассмотрен в ([2])), а также получение сильных кластерных оценок (для классических систем см. ([4])—([6])).

1° Пусть (X, μ)—стандартное пространство с конечной мерой ($\mu(X)=1$), называемое в дальнейшем пространством марок (или спинов), (X^θ, μ^θ)—пространство с мерой, полученное добавлением к X одной точки θ (называемой „вакуумом") меры 1. Для каждого $\Lambda\subset Z^\nu$ (ν—мерная целочисленная решетка), $|\Lambda|=\mathrm{card}\Lambda<\infty$, положим $X^\theta_\Lambda=\prod\limits_{t\in\Lambda} X^\theta_t$, $X^\theta_t=X^\theta$ при $t\in\Lambda$, $X^\theta_\varnothing=\varnothing$ с продакт-мерой μ^θ_Λ. Пространством конфигураций рассматриваемой системы служит $L^\theta=\bigcup\limits_{\Lambda\subset Z^\nu} X^\theta_\Lambda$ с естественной структурой пространства с мерой. Аналогичные объекты для пространства марок обозначаются соответственно X_Λ, μ_Λ, L. Пусть задан потенциал Φ (измеримая действительная функция на L^θ, $\Phi(\varnothing)=0$), который

i) трансляционно инвариантный, т. е. $\Phi(\tilde{x}_s, s\in\Lambda+a)=\Phi(x_\lambda, \lambda\in\Lambda)$ для $\tilde{x}_s=x_{s-a}$, $a\in Z^\nu$, $s\in\Lambda+a$;

ii) вакуумный, т. е. $\Phi(x_\lambda, \lambda\in\Lambda)=0$, если $x_{\lambda_0}=\theta$ для некоторого $\lambda_0\in\Lambda$;

iii) удовлетворяет следующему условию убывания на бесконечности:

$$\|\Phi\| = \sum_{\Lambda:0\in\Lambda\subset Z^\nu} \sup_{x\in X_\Lambda} |\Phi(x)| < \infty.$$

Для любой конфигурации $x=(x_\lambda,\ \lambda\in J)$ ее энергия определяется формулой $U(x)=\sum_{J\subset\Lambda}\Phi(x_J)$, где $x_J=(x_\lambda,\ \lambda\in J)$. Пусть ψ—функция Больцмана $\psi(x)=\exp\{-U(x)\}$. Распределение Гиббса в конечном объеме P_Λ, $\Lambda\subset Z^\nu$ задается плотностью $p_\Lambda(x)=\Xi^{-1}\psi(x)$ относительно меры μ^0_Λ, где нормирующий множитель (статистическая сумма) $\Xi=\int_{X^0_\Lambda}\psi(x)d\mu^0_\Lambda(x)$, а корреляционная функция $\rho_\Lambda(x)$, $x\in L$ определена следующим выражением:

$$\rho_\Lambda(x)=\begin{cases}\Xi_\Lambda^{-1}\int_{X^0_{\Lambda,J}}\psi(x,y)d\mu^0_{\Lambda,J}(y), & \text{если } x\in X_J,\quad J\subset\Lambda\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{1}$$

В ([3]) выведены уравнения для этих функций (называемые корреляционными), доказаны существование и единственность предельных корреляционных функций

$$\rho_\Lambda(x)=\lim_{\Lambda\uparrow Z^\nu}\rho_\Lambda(x),\quad x\in L$$

для потенциалов, удовлетворяющих условию малости нормы:

iv) $2e^{\|\Phi\|}(1+e^{\|\Phi\|})^{-1}(1+2e^{\|\Phi\|})(\exp(e^{\|\Phi\|}-1)-1)<1.$

2°. Пусть $Y_n=X^n/\sum^n$, где $\sum^n$—группа перестановок степени n, $n=1,2,\ldots$, $Y_0=\varnothing$, представляющее собой пространство с мерой $\frac{1}{n!}\mu^n$. Обозначим через E множество всех финитных отображений $\eta: Z^\nu\to\bigcup_{n\geq 0}Y_n$ (т. е. $|\operatorname{supp}\eta|<\infty$, где $\operatorname{supp}\eta=\{\lambda\in Z^\nu:\eta(\lambda)\notin Y_0\}$, а через $\hat E$—множество всех финитных функций на Z^ν, принимающих натуральные значения, или нуль. Заметим, что $\hat E$ совпадает с пространством „нефизических" конфигураций, рассмотренным в ([1]). Определим отображение $\pi: L\to E$ (являющееся вложением) по формуле

$$\pi(x)(\lambda)=x_\lambda,\ \lambda\in\Lambda,\quad \pi(x)(\lambda)=\varnothing,\ \lambda\notin\Lambda,\quad x=(x_\lambda,\ \lambda\in\Lambda)$$

Пусть $\tau: E\to\hat E$, $(\tau\eta)(\lambda)=|\eta(\lambda)|$; обозначим $E(\xi)=\tau^{-1}\xi$, для $\xi\in\hat E$. Легко проверить, что $E(\xi)$ биективно $\prod_{\lambda\in\operatorname{supp}\xi}Y_{\xi(\lambda)}$, поэтому на $E(\xi)$, а следовательно и на $E=\bigcup_{\xi\in\hat E}E(\xi)$ существует структура пространства с мерой (обозначаемой μ_Ξ, $\xi\in\hat E$). Ясно, что множество тех $\eta\in E$, значения которых содержат по крайней мере две одинаковые марки, имеет меру нуль, поэтому можно считать, что для любого λ конфигурация $\eta(\lambda)$ состоит из разных марок.

Пусть A—линейное пространство комплексных функций f на E, таких, что $\sup_{|\xi|=n}\int_{E(\xi)}|f(\eta)|d\mu_\Xi(\eta)<\infty$ для любого n, где $|\xi|=\sum_{\lambda\in Z^\nu}\xi(\lambda)$. Для любых f_1, f_2 положим

$$(f_1*f_2)(\eta)=\sum_{\eta'\leq\eta}f_1(\eta')f_2(\eta-\eta'), \tag{2}$$

где $\eta'\leqslant\eta$ означает, что для всякого λ $\eta'(\lambda)\subset\eta(\lambda)$, а $(\eta-\eta')(\lambda)=\eta(\lambda)\setminus\eta'(\lambda)$. С таким произведением A превращается в коммутативную алгебру с единицей ($1(\eta)=0$, $\eta\neq\eta_0$, $1(\eta_0)=1$, где $\eta_0(\lambda)=\varnothing$, $\forall\lambda\in Z^\nu$). Множество $\hat{A}$ финитных комплексных функций φ на $\hat{E}$, таких, что $\sup\limits_{|\xi|=n}|\varphi(\xi)|<\infty$, для любого n с аналогично определенными алгебраическими операциями, есть коммутативная алгебра, рассмотренная в ([1]).

Лемма 1. *Отображение* $\hat{}: A\to\hat{A}$, *определяемое формулой*

$$\hat{f}(\xi)=\int\limits_{\Gamma(\xi)} f(\eta)\,d\mu_\xi(\eta),$$

является гомоморфизмом алгебры A *на* $\hat{A}$.

Пусть Λ — произвольное подмножество Z^ν, положим

$$G_\Lambda=\{f\in\Lambda,\ \sum_{\xi:\,\mathrm{supp}\,\xi\subset\Lambda}|\hat{f}(\xi)|<\infty\}. \tag{3}$$

Лемма 2. *Линейный функционал* χ_Λ, *определяемый на* G_Λ *формулой*

$$\chi_\Lambda(f)=\sum_{\xi:\,\mathrm{supp}\,\xi\subset\Lambda}\hat{f}(\xi),$$

мультипликативен.

Пусть $A_0=\{f\in A: f(\eta_0)=0\}$. Обычным образом определенный экспоненциальный оператор exp взаимно-однозначно отображает этот идеал на множество $A_1=\{f\in A: f(\eta_0)=1\}$. Поэтому существует обратное отображение, которое мы обозначаем через ln. Заметим, что функцию Больцмана ψ и корреляционную функцию ρ можно считать элементами алгебры A (более того, принадлежащими A_1), полагая их равными нулю на $E\setminus\pi(L)$. Функции $\varphi=\ln\psi$ и $\rho^T=\ln\rho$ называются, соответственно, функцией Урселла и усеченной корреляционной функцией.

Каждое $\eta\in A$ определяет на A оператор

$$(D_\eta f)(\eta')=f(\eta+\eta'),$$

являющийся дифференцированием, если $|\eta|=1$ (здесь $(\eta+\eta')(\lambda)$ при всех λ есть дизъюнктное объединение множеств $\eta(\lambda)$ и $\eta'(\lambda)$).

Предложение. *Функция* $\tilde{\varphi}_{\bar\eta}=\psi^{-1}*D_{\bar\eta}\psi$, ($\bar\eta\in E$, $\bar\eta\neq\eta_0$) *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\tilde{\varphi}_{\bar\eta}(\eta)=e^{-W(\bar\eta,\,\eta_0)}\sum_{\eta'}K(\bar\eta,\,\eta')\tilde{\varphi}_{\bar\eta+\eta'-\tilde\eta}(\eta-\eta'), \tag{4}$$

где суммирование распространяется на все однократные $\eta'\leqslant\eta$ ($\forall\lambda$, $|\eta'(\lambda)|\leqslant 1$), $\mathrm{supp}\,\eta'\cap\mathrm{supp}\,\bar\eta=\varnothing$, *а* $\tilde\eta\leqslant\bar\eta$, $|\tilde\eta|=1$. *Здесь*

$$W(\bar\eta,\,\zeta)=\sum_{J\subset\mathrm{supp}(\bar\eta-\tilde\eta)}\Phi(\tilde\eta+\zeta+(\bar\eta-\tilde\eta)|_J),\quad K(\bar\eta,\,\zeta)=\sum\prod_{i=1}^{k}(e^{-W(\bar\eta,\,\zeta|_{J_i})}-1),$$

причем в последнем выражении суммирование происходит по всевозможным покрытиям $\mathrm{supp}\,\zeta$ *непустыми множествами* $\{J_1, J_2, \ldots, J_k\}$.

Основным результатом настоящей заметки являются следующие оценки.

Теорема. *Пусть Φ—трансляционно инвариантный вакуумный потенциал, удовлетворяющий условиям убывания на бесконечности* ((iii) п.1) *и малости нормы* ((iv) п.1), $c(\Phi)=2e^{\|\Phi\|}(\exp(e^{\|\Phi\|}-1)-1)$.

Тогда при $\eta\neq\eta_0$ *и любом* $\Lambda\subset Z^\nu$

(i) $\sum\limits_{\xi:|\xi|=m}\int\limits_{E(\xi)}|\tilde{\varphi}_\eta(\eta')|d\mu_\xi(\eta')\leqslant c(\Phi)^{m+|\eta|-1}$;

(ii) $\tilde{\varphi}_\eta\in G_\Lambda$, $\rho_\Lambda(\eta)=\chi_\Lambda(\tilde{\varphi}_\eta)$, $\rho_{Z^\nu}\equiv\rho$;

(iii) $D_\eta\varphi\in G_\Lambda$, $\rho^T_\Lambda(\eta)=\chi_\Lambda(D_\eta\varphi)$, $\rho^T_{Z^\nu}\equiv\rho^T$;

(iv) $\sum\limits_{\xi:|\xi|=m,\ 0\in\operatorname{supp}\xi}\int\limits_{E(\xi)}|\rho^T(\eta)|d\mu_\xi(\eta)\leqslant\dfrac{c(\Phi)^{m-1}}{(1-c(\Phi))^m}$, $m=1, 2, \ldots$

Главным средством при доказательстве этой теоремы служит уравнение (4).

Институт математики Академии наук
Армянской ССР

Վ. Ա. ԱՐՋՈՒՄԱՆՅԱՆ, Բ. Ս. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ, Ս. Կ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Անընդհատ սպինով դիսկրետ համակարգերի կլաստերային հատկությունները

Աշխատանքում ուսումնասիրված են կոռելյացիոն ֆունկցիաների կլաստերային հատկությունները մակնիշային տարածությունով դիսկրետ դասական համակարգերի համար։

Դիտարկվում է դասական դիսկրետ համակարգ անընդհատ մակնիշային տարածությամբ։ Ենթադրվում է, որ Φ *բազմամասնիկային պոտենցիալը ինվարիանտ է տեղաշարժերի նկատմամբ* (i), *վակուումային է* (ii) *նվազում է անվերջության վրա* (iii) *և նրա նորման բավարարում է* (iv) *պայմանին (տես կ.1°) Նշանակենք* ψ*-ով Բոլցմանի ֆունկցիան՝* $\psi(x)=\exp(-U(x))$ *որտեղ՝* $U(x)=\sum\limits_{J\subset\Lambda}\Phi(x|_J)$, $x=(x_\lambda, \lambda\in\Lambda)\in L^\theta$ *կոնֆիգուրացիայի էներգիան է։ Կոռելյացիոն ֆունկցիան որոշվում է (1) բանաձևով։ Դիցուք* E*-ն* $\eta: Z^\nu\to\bigcup\limits_{n\geqslant0}X^n/\Sigma^n$ *ֆինիտ արտապատկերումների բազմությունն է, որտեղ* Σ^n*-ը* n *աստիճանի տեղափոխությունների խումբն է։ Նկատենք, որ* $E(\xi)=\{\eta\in E:(\eta(\lambda))=\xi(\lambda)\}$, $\xi: Z^\nu\to Z_+$, *բազմության վրա գոյություն ունի չափով տարածության կառուցվածքը, որը թույլ է տալիս սահմանել չափ* $E=\bigcup\limits_\xi E_\xi$ *վրա։ Դիտարկենք*

$$A=\left\{f: E\to C: \sup_{|\xi|=n}\int\limits_E|f(e)|d\mu_\xi(\eta)<\infty,\quad\forall n\right\}$$

հանրահաշիվը, որտեղ արտադրյալը տրված է (2) բանաձևով։ Այս հանրահաշվի $A_0=\{f\in A: f(\eta_0)=0\}$, $(\eta_0\equiv\varnothing)$ *իդեալի վրա որոշված էքսպոնենցիալ օպերատորը փոխմիարժեք արտապատկերում է* A_0*-ն* $A_1=\{f\in A: f(\eta_0)=1\}$ *բազմության վրա, ուստի որոշված է հակադարձ* ln *արտապատկերումը։ Ուր-*

սելլի φ *և հատված կոռելյացիոն* ρ^T *ֆունկցիաները որոշվում են համապատասխանորեն* $\varphi=\ln\psi$ *և* $\rho^T=\ln\rho$ *հավասարություններով։ Նշանակենք* D_η, $(D_\eta f)(\bar\eta)=f(\eta+\bar\eta)$ *բանաձևով* A*-ի վրա գործող օպերատորը, իսկ* χ_Λ*-ով* G_Λ*-ի վրա (տես (3)) որոշված* $\chi_\Lambda(f)=\sum\limits_{\xi:\,\mathrm{supp}\,\xi\subset\Lambda}\int\limits_{\Gamma(\xi)} f(\eta)\,d\mu_\xi(\eta)$ *գծային ֆունկցիոնալը։*

Հիմնական արդյունքը կայանում է հետևյալում՝

Թեորեմ (տես կ.2 վերջը)։ Եթե Φ-ն բավարարում է վերը նշված պայմաններին և $c(\Phi)=2e^{\|\Phi\|}(\exp(e^{\|\Phi\|}-1)-1)$, ապա տեղի ունի (I)—(IV), որտեղ $\tilde\varphi_\eta=\psi^{-1}*D_\eta\psi$։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *G. Galavotti, S. Miracle-Sole*, Commun. Math. Phys., v. 7 (1968). [2] *Д. Рюэль*, Статистическая механика, Мир, М., (1971). [3] *Б. С. Нахапетян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 10, № 3 (1975). [4] *M. Duneau, B. Souillard, D. Iagolnitzer* J. of Math. Phys., v. 16 (1975). [5] *M. Duneau, B. Souillard*, Commun. Math. Phys., v. 47 (1976). [6] *Р. А. Минлос, С. К. Погосян*, Теор. и мат. физика, т. 31, № 2 (177).