ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXX 1985 4

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Л. М. Мурадян, Р. Н. Барсегян, Р. Л. Энфиаджян

Плоская термоупругая задача для неоднородной полосы с трещинами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 7/VI 1984)

Задачи, посвященные определению напряженного состояния однородной полосы с трещинами, рассмотрены в работах [1-3]. В настоящей работе рассматривается бесконечная упругая полоса в высоком нестационарном температурном поле, когда упругие характеристики материала полосы являются функциями температуры, а ширина полосы является известной функцией времени. Учитывая существующие экспериментальные исследования для углеродистых сталей [4], изменением коэффициента Пуассона можно пренебречь, а модуль упругости можно аппроксимировать экспоненциальной функцией.

Разрешающее уравнение плоской термоупругой задачи относительно функции напряжений Эри для рассматриваемой неоднородности примет следующий вид [5]:

$$\nabla\nabla\Phi+\lambda M_1(\Phi)+\lambda^2 M_2(\Phi)=-\alpha E_0(1+m)e^{-\lambda\Theta}\nabla\Theta, \tag{1}$$

где M_1 и M_2 дифференциальные операторы следующего вида:

$$M_1(\Phi)=2\Theta_{,x}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial x}+2\Theta_{,y}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial y}+2(1+\nu)\Theta_{,xy}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+$$
$$+\Theta_{,xx}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)+\Theta_{,yy}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right);$$

$$M_2(\Phi)=\Theta_{,x}^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)+2(1+\nu)\Theta_{,x}\Theta_{,y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\Theta_{,y}^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right),$$

λ, E_0—постоянные аппроксимации модуля упругости; $m=0$ для плоского напряженного состояния, $m=\frac{\nu}{1-\nu}$ для плоской деформации.

Решение уравнения (1) ищем в виде ряда относительно малого параметра λ

$$\Phi=\Phi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\Phi_n, \tag{2}$$

где Φ_0—решение плоской термоупругой задачи для неоднородного тела.

Используя (2), из (1) получим рекуррентную систему неоднородных бигармонических уравнений относительно неизвестных функций Φ_n

$$\nabla\nabla\Phi_0=-\alpha E_0(1+m)\nabla\Theta$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$

$$\nabla\nabla\Phi_n=-M_1(\Phi_{n-1})-M_2(\Phi_{n-2})-\alpha E_0(1+m)\frac{\Theta^n\nabla\Theta(-1)^n}{n!}.$$

С целью исследования сходимости решения полученной системы сначала оценим Φ_n. Как известно, бигармонический оператор является положительно определенным. Согласно ([6]), если правая часть n-го уравнения (3) принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, то уравнение имеет единственное решение из пространства $W_2^{(4)}(\Omega)$ и верно следующее неравенство:

$$\|\Phi_n\|_{W_2^{(4)}(\Omega)}\leqslant C\left\|-M_1(\Phi_{n-1})-M_2(\Phi_{n-2})-\alpha E_0(1+m)\frac{\Theta^n\nabla\Theta}{n!}(-1)^n\right\|.$$

Так как λ, α, $E_0>0$, согласно известному закону треугольника имеем

$$\|\Phi_n\|_{W_2^{(4)}(\Omega)}\leqslant C\left[\|M_1(\Phi_{n-1})\|_{L_2(\Omega)}+\|M_2(\Phi_{n-2})\|_{L_2(\Omega)}+\alpha E_0(1+m)\frac{|\Theta^n|}{n!}\|\nabla\Theta\|_{L_2(\Omega)}\right].$$

Принимая во внимание неравенства:

$$\|M_1(\Phi_{n-1})\|_{L_2(\Omega)}\leqslant|\Theta_m|\|\Phi_{n-1}\|_{W_2^{(4)}(\Omega)},\quad \|M_2(\Phi_{n-2})\|\leqslant|\Theta_m|\|\Phi_{n-2}\|_{W_2^{(4)}(\Omega)},$$

$$\|\nabla\Theta\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\|\Theta\|_{W_2^{(4)}(\Omega)},$$

где $|\Theta_m|$ наибольшее из

$$(1-\nu)(\Theta_{,x}^2+\Theta_{,y}^2)+2(1+\nu)|\Theta_{,x}\Theta_{,y}|$$

и

$$2[|\Theta_{,x}|+|\Theta_{,y}|+(1+\nu)|\Theta_{,xy}|]+(1-\nu)(|\Theta_{,xx}|+|\Theta_{,yy}|),$$

на основе приведенных неравенств из (3) следует, что

$$S_n<\frac{(1+C)\|\Theta\|}{[Ce^{\lambda|\Theta|}\lambda(1+\lambda)\alpha E_0(1+m)|\Theta^*|]^{-1}-1}, \qquad (6)$$

где $|\Theta^*|$ наибольшее из $|\Theta_m|$ и $|\Theta|$, а S_n определяется из соотношения $\bar{S}_n=\lambda\|\Phi_1\|+\lambda^2\|\Phi_2\|+\ldots+\lambda^n\|\Phi_n\|$.
Учитывая, что $S_n=\lambda\Phi_1+\lambda^2\Phi_2+\ldots+\lambda^n\Phi_n$,
получаем неравенство $\bar{S}_n>S_n$.

Если $\lambda<\lambda_0$, где λ_0 наименьший положительный корень уравнения

$$\lambda_0(\lambda_0+1)e^{\lambda_0|\Theta|}=[\alpha E_0(1+m)|\Theta^*|C]^{-1}, \qquad (7)$$

то ряды для S_n и его производных по пространственным координатам до четвертого порядка включительно в области Ω сходятся абсолютно и равномерно.

Рассмотрим плоскую термоупругую задачу для бесконечной полосы с двумя коллинеарными поперечными трещинами (рис. 1).

Эта задача сводится к решению рекуррентной системы бигармо-

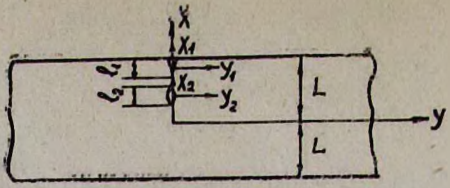

Рис. 1

нических неоднородных уравнений (3) при следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} = -P_n(x_i); \qquad |x_i| \leq l_i, \; y=0, \quad i=1, 2 \tag{8}$$

где $P_n(x_i) = \dfrac{\partial^2 \Phi_n^*}{\partial x^2}$, а Φ_n^*—решение рекуррентной системы бигармонических неоднородных уравнений для сплошной полосы с заданной неоднородностью при однородных граничных условиях.

Применяя метод Колосова—Мусхелишвили, сформулированную граничную задачу для бесконечной неоднородной полосы можно свести к решению следующей системы сингулярных интегральных уравнений (²):

$$\int\limits_{-l_n}^{l_n} \frac{g'_{nm}(t)}{t-x} dt + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-l_k}^{l_k} \left[g'_{km}(t) R_{nk}(t, x) + \bar{g}'_{km}(t) S_{nk}(t, x) \right] dt = \pi P_{nm}(x),$$

$$\int\limits_{-l_n}^{l_n} g'_{nm}(t) dt = 0 \qquad |x| < l_n, \quad n=1, 2, \tag{9}$$

где $g_{nm}(x)$—неизвестная комплексная функция, характеризующая разрыв перемещений в m-ом приближении на линиях разрезов. $\bar{g}_{nm}(x)$ является комплексно сопряженной с $g_{nm}(x)$.

$$P_{nm}(x) = \sigma^{+}_{nm}(x) - i\tau^{+}_{nm}(x) = \sigma^{-}_{nm}(x) - i\tau^{-}_{nm}(x); \tag{10}$$

$$R_{nk}(t, x) = (1-\delta_{nk}) k_{nk}(t, x) + r_{nk}(t, x);$$

$$S_{nk}(t, x) = (1-\delta_{nk}) L_{nk}(t, x) + S_{nk}(t, x); \tag{11}$$

$k_{nk}(t, x)$; $L_{nk}(t, x)$; $r_{nk}(t\ x)$ и $S_{nk}(t, x)$ определяются известными соотношениями (³).

Приведем решение полученной системы (9) для полосы с одной краевой трещиной, когда температурное поле симметрично относительно трещины.

Выделив особенность у вершины трещины, ищем неизвестную функцию перемещения $v(\tau)$ в виде интерполяционного полинома Лагранжа по чебышевским узлам $\tau_k = \cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi$, $k=1, 2, \ldots, N$, где N—натуральное число.

Используя квадратурные формулы Гаусса (²), методом механических квадратур из интегрального уравнения (9) получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения N неизвестных функций

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{u_{km}(t_k)}{t_k-x_n}+\lambda[u_{km}(t_k)(a(t_k, x_n)+b(t_k, x_n))]\right\}=P_{km}(x_n),$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}u_{km}(t_k)\operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4N}\pi=0,$$

где $u_m(x)=v'(x)\sqrt{1-x^2}$, $x_n=\cos\frac{\pi n}{N}$, $n=1, 2, \ldots, N-1$, $\lambda=\frac{l}{L(t)}$, а $a(t_k, x_n)$, $b(t_k, x_n)$ получаются из выражений $R_{11}(t, x)$ и $S_{11}(t, x)$ соответственно (11).

Коэффициент интенсивности напряжений у вершины трещины определится по формуле [2]

$$K=K_0+\sum_{m=1}^{\infty}K_m\lambda^m,$$

где

$$k_m=\sqrt{l}\,\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+N}u_{km}(t_k)\operatorname{tg}\frac{2k-1}{4N}\pi.$$

Числовые вычисления проведены для температурной функции, которая соответствует решению задачи теплопроводности при граничных условиях первого рода

$$T=\frac{2}{a(\tau)}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\varkappa\pi^2n^2\tau}{a^2(\tau)}\right)\sin\frac{\pi nx}{a(\tau)}\left[\int_0^{a(\tau)}f'(x')\sin\frac{\pi nx'}{a(\tau)}dx'+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi\varkappa n}{a(\tau)}\left(\int_0^{\tau}\exp\left(\frac{\varkappa\pi^2n^2\lambda}{a^2(\tau)}\right)\varphi_1(\lambda)d\lambda-(-1)^nT_c\tau\right)\right],$$

где $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности; $\varphi_1(\tau)$ — функция, определяющая охлаждение кромки полосы с трещиной; T_c — температура на поверхности полосы без трещины; $f(x)$ — начальное распределение температурного поля.

На рис. 2 приводится график изменения во времени коэффициента интенсивности напряжений у вершины трещины для следующих значений известных функций и параметров, приведенных в решении:

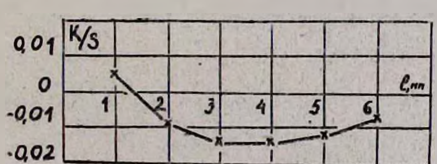

Рис. 2

$$a(t)=a_0+k\sqrt{t}\qquad f(t)=T_c-\frac{T_c-\varphi_1(t)}{a(t)}x$$

$$T_c = 1470^\circ \qquad a_0 = 15\ \text{мм}$$

$$\varphi_1(t) = 930^\circ \qquad \varkappa = 12\ \text{мм}^2/\text{сек} \qquad k = 2{,}75\ \text{мм}(\text{сек})^{-1/2}.$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Լ. Մ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ, Ռ. Ն. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Ռ. Լ. ԷՆՖԻԱՋՅԱՆ

Ճաքեր ունեցող անհամասեռ շերտի ջերմաառաձգական հարթ խնդիրը

Դիտարկված է ջերմաառաձգական հարթ խնդիրը, ջերմաստիճանից կախված առաձգական հատկություններով նյութի համար։ Խնդիրը լուծված է փոքր պարամետրի եղանակով և ապացուցված է լուծման ընթացքի հավասարաչափ և բացարձակ զուգամիտությունը։ Գնահատված է զուգամիտության շառավիղը։

Երկու լայնական համառանցք ճաքեր ունեցող անհամասեռ անվերջ շերտի ջերմաառաձգական խնդիրը բերված է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների ռեկուրենտ սիստեմի լուծման։ Հավասարումների սիստեմը լուծված է մեկ եզրային ճաք ունեցող անվերջ շերտի համար։ Կատարված է թվային հաշվարկ և կառուցված է ճաքի գագաթում լարումների ինտենսիվության գործակցի փոփոխման գրաֆիկը՝ կախված ճաքի երկարությունից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука, М., 1966. [2] *В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин*, Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках, Наукова думка, Киев, 1976. [3] *В. В. Панасюк*, Предельное равновесие хрупких тел с трещинами, Наукова думка, Киев, 1968. [4] *Р. Н. Барсегян, Л. М. Мурадян, О. М. Сапонджян* и др. (Отчет ЕрПИ: Б—991250), Ереван, 1980. [5] *Л. П. Тер-Мкртчян*, ПММ, т. 25, № 6 (1961). [6] *С. Г. Михлин*, Вариационные методы в математической физике, Наука, М., 1970.