ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 4

УДК 539. 376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Ф. М. Поладян

Ползучесть составного сектора кругового кольца с поперечным сечением, ограниченным тремя неконцентрическими окружностями при кручении

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 7/VI 1984)

Рассматривается задача о кручении составного сектора кругового кольца (кривой стержень), поперечное сечение которого состоит из N различных областей, материалы которых обладают свойством наследственной ползучести с различными мерами ползучести и модулями мгновенного сдвига [1].

Пусть рассматриваемый сектор кругового кольца с постоянным поперечным сечением находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R—радиус оси сектора кругового кольца), приложенных на торцевых сечениях (рис. 1).

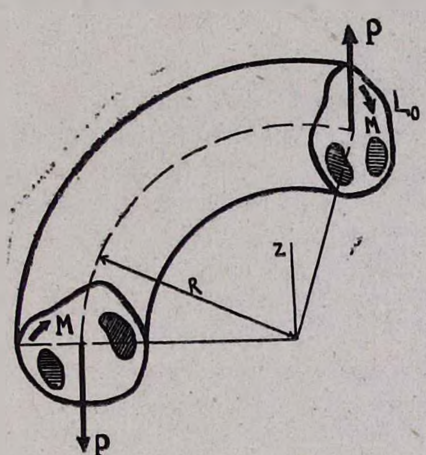

Рис. 1. Составной сектор кругового кольца, находящийся под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов $M=PR$, приложенных на торцевых сечениях

Задачи кручения однородных кривых стержней исследованы в работах [2-5]. В работе [6] рассмотрено кручение составного сектора кругового кольца с прямоугольным поперечным сечением при нелинейной ползучести.

1. Примем, что в области Ω_m между компонентами деформаций ползучести и напряжениями имеют место соотношения Маслова—Арутюняна [1]

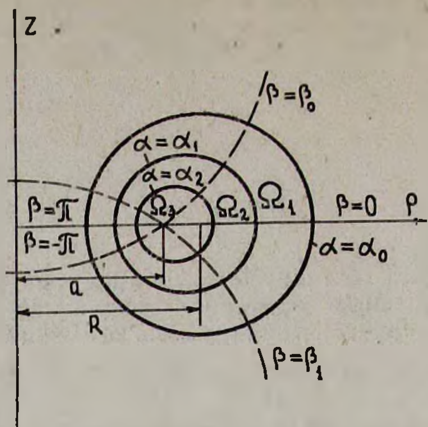

Рис. 2. Семейство окружностей с полюсом и семейство дуг окружностей, ортогональных к ним

$$2G_m\varepsilon_{ij}^{(m)}=s_{ij}^{(m)}-\int_{\tau_1}^{t} s_{ij}^{(m)}K_m(t,\tau)d\tau \quad (m=\overline{1,\ N}), \tag{1.1}$$

где G_m—модуль сдвига, $s_{ij}^{(m)}=\sigma_{ij}^{(m)}-\delta_{ij}^{(m)}\sigma^{(m)}$, δ_{ij}—символ Кронекера, $\sigma^{(m)}$—среднее давление, $K_m(t,\tau)=3G_m\dfrac{\partial C_m(t,\tau)}{\partial\tau}$, $C_m(t,\tau)$—мера ползучести в области Ω_m.

Воспользуемся тороидальными координатами α, β, γ: $x=\rho\cos\gamma$, $y=\rho\sin\gamma$, $z=H\sin\beta$, где $\rho=a\cdot\operatorname{sh}\alpha\cdot(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^{-1}$, $H=a(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^{-1}$, здесь $0\leqslant\alpha\leqslant\infty$, $-\pi\leqslant\beta\leqslant\pi$, $0\leqslant\gamma\leqslant 2\pi$ (рис. 2).

Полагая в уравнениях равновесия ([7]) отличными от нуля только напряжения $\sigma_{\alpha\gamma}^{(m)}$ и $\sigma_{\beta\gamma}^{(m)}$ $(m=1,2,\ldots,N)$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H\rho^2\sigma_{\beta\gamma}^{(m)})+\frac{\partial}{\partial\beta}(H\rho^2\sigma_{\alpha\gamma}^{(m)})=0 \quad (m=\overline{1,\ N}), \tag{1.2}$$

а из остальных уравнений следует, что напряженное состояние сектора кольца не зависит от γ, следовательно, тензор деформации также не зависит от γ.

Аналогично ([4,5]) получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{H}{\rho}\varepsilon_{\beta\gamma}^{(m)}\right]-\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{H}{\rho}\varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)}\right]=D\frac{H^2}{\rho^3}, \quad (m=\overline{1,\ N}), \tag{1.3}$$

где $D=D(t)$—произвольная функция от t.

Полагая равными нулю все компоненты деформаций, кроме $\varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)}$ и $\varepsilon_{\beta\gamma}^{(m)}$, получим систему относительно перемещений. Решения этой системы уравнений позволяют получить выражения для перемещений.

В каждой области Ω_m, вводя функцию напряжений $\Phi_m(\alpha,\beta,t)$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(m)}=-\frac{1}{H\rho^2}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\beta}, \quad \sigma_{\beta\gamma}^{(m)}=\frac{1}{H\rho^2}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha} \quad (m=\overline{1,\ N}),$$

при помощи соотношения (1.1), (1.3) получаем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\beta}\right)-\int_{\tau_1}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\beta}\right)\right]K_m(t,\tau)d\tau=DG_m\frac{H^2}{\rho^3}\qquad (m=\overline{1,\ N}). \tag{1.4}$$

Аналогично ([6]) можно получить контурные условия и условия на линиях контакта L_{ij}:

$$\Phi_m(\alpha,\beta,t)=0 \text{ на } L_0, \tag{1.5}$$

$$\Phi_i(\alpha,\beta,t)=\Phi_j(\alpha,\beta,t) \text{ на } L_{ij}, \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{G_i}\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}-3\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}\frac{\partial C_i(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\frac{1}{G_j}\frac{\partial\Phi_j}{\partial n}-3\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi_j}{\partial n}\frac{\partial C_j(t,\tau)}{\partial\tau}\partial\tau \text{ на } L_{ij}, \tag{1.7}$$

где n—нормаль к L_{ij}.

Крутящий момент выражается формулой

$$M=\sum_{m=1}^{N}\iint_{\Omega m}[(\rho-R)\sigma_{z\gamma}^{(m)}-z\sigma_{\rho\gamma}^{(m)}]d\Omega=2R\sum_{m=1}^{N}\iint_{\Omega m}\frac{\Phi_m}{\rho^3}d\Omega.$$

2. Рассмотрим задачу о кручении составного сектора кругового кольца, поперечное сечение которого состоит из трех областей, ограниченных неконцентрическими окружностями (рис. 2). Пусть в области Ω_2 материал обладает свойством ползучести, а в областях Ω_1 и Ω_3 справедлив закон Гука.

Вводя новую функцию $\Psi_m(\alpha,\beta,t)$ при помощи соотношения $\Phi_m(\alpha,\beta,t)=(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^{-3/2}\operatorname{sh}^2\alpha\cdot\Psi_m(\alpha,\beta,t)$, из (1.4) получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2\Psi_m}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\Psi_m}{\partial\beta^2}+\operatorname{cth}\alpha\frac{\partial\Psi_m}{\partial\alpha}+\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{\operatorname{sh}^2\alpha}\right)\Psi_m=H^2A^{-1}f_m(t)\quad (m=1,2,3) \tag{2.1}$$

где $A=\operatorname{sh}^2\alpha(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^{-3/2}$; $f_2(t)=G_2[D(t)+\int_{\tau_1}^{t}D(\tau)R_2(t,\tau)d\tau]$; $f_i(t)=G_iD(t)$, $i=1,3$: $R_2(t,\tau)$—резольвента ядра $K_2(t,\tau)$. Для меры ползучести $C_2(t,\tau)=\left(C_0+\frac{A_1}{\tau}\right)[1-e^{-\gamma_1(t-\tau)}]$ $R_2(t,\tau)$ определяется так, как в ([5]).

Решение систем уравнений (2.1) при граничных условиях (1.5)—(1.6) можно представить в виде

$$F_1(\alpha,\beta,t)=\frac{\Pi_{-1/2}^2(\alpha_0,\alpha)}{2\Pi_{-1/2}^2(\alpha_0,\alpha_1)}[a_{01}(t)P_{-1/2}^2(\operatorname{ch}\alpha_1)+a_{02}(t)Q_{-1/2}^2(\operatorname{ch}\alpha_1)]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\Pi_{-1/2}^2(\alpha,\alpha_1)}{\Pi_{-1/2}^2(\alpha_0,\alpha_1)}\alpha_0^1(t)+\frac{\Pi_{-1/2}^2(\alpha_0,\alpha)}{\Pi_{-1/2}^2(\alpha_0,\alpha_1)}\beta_0^1(t)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\Pi_{n-1/2}^2(\alpha_0,\alpha)}{\Pi_{n-1/2}^2(\alpha_0,\alpha_1)}[a_{n1}(t)P_{n-1/2}^2(\operatorname{ch}\alpha_1)+a_{n2}(t)Q_{n-1/2}^2(\operatorname{ch}\alpha_1)]\right\}\cos n\beta+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\Pi_{n-1/2}^2(\alpha,\alpha_1)}{\Pi_{n-1/2}^2(\alpha_0,\alpha_1)}\alpha_n^1(t)+\frac{\Pi_{n-1/2}^2(\alpha_0,\alpha)}{\Pi_{n-1/2}^2(\alpha_0,\alpha_1)}\beta_n^1(t)\right]\cos n\beta, \tag{2.2}$$

$$F_2(\alpha, \beta, t)=\frac{1}{2}\left[a_{01}(t)P^2_{-1/2}(\mathrm{ch}\alpha)+a_{02}(t)Q^2_{-1/2}(\mathrm{ch}\alpha)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n1}(t)P^2_{n-1/2}(\mathrm{ch}\alpha)+a_{n2}(t)Q^2_{n-1/2}(\mathrm{ch}\alpha)\right]\cos n\beta, \tag{2.3}$$

$$F_3(\alpha, \beta, t)=\frac{Q^2_{-1/2}(\mathrm{ch}\alpha)}{2Q^2_{-1/2}(\mathrm{ch}\alpha_2)}\left[a_{01}(t)P^2_{-1/2}(\mathrm{ch}\alpha_2)+a_{02}(t)Q^2_{-1/2}(\mathrm{ch}\alpha_2)\right]-$$

$$-\frac{Q^2_{-1/2}(\mathrm{ch}\alpha)}{2Q^2_{-1/2}(\mathrm{ch}\alpha_2)}\gamma^1_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{Q^2_{n-1/2}(\mathrm{ch}\alpha)}{Q^2_{n-1/2}(\mathrm{ch}\alpha_2)}a_{n1}(t)P^2_{n-1/2}(\mathrm{ch}\alpha_2)+\right.$$

$$\left.+a_{n2}(t)Q^2_{n-1/2}(\mathrm{ch}\alpha_2)\right]-\frac{Q^2_{n-1/2}(\mathrm{ch}\alpha)}{Q^2_{n-1/2}(\mathrm{ch}\alpha_2)}\gamma^1_n(t)\Big\}\cos n\beta, \tag{2.4}$$

где

$$\Psi_i(\alpha, \beta, t)=F_i(\alpha, \beta, t)+f_i(t)z^2/2A \quad (i=1, 2, 3),$$

$$\alpha^1_n(t)=-\frac{f_1(t)a^2}{\pi\,\mathrm{sh}^2\alpha_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\beta\cos n\beta}{(\mathrm{ch}\alpha_0-\cos\beta)^{1/2}}d\beta \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$\beta^1_n(t)=\frac{[f_2(t)-f_1(t)]a^2}{\pi\,\mathrm{sh}^2\alpha_1}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\beta\cos n\beta}{(\mathrm{ch}\alpha_1-\cos\beta)^{1/2}}d\beta \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$\gamma^1_n(t)=\frac{[f_3(t)-f_2(t)]a^2}{\pi\,\mathrm{sh}^2\alpha_2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\beta\cos n\beta}{(\mathrm{ch}\alpha_2-\cos\beta)^{1/2}}d\beta \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$\Pi^m_n(\alpha, \beta)=P^m_n(\mathrm{ch}\alpha)Q^m_n(\mathrm{ch}\beta)-P^m_n(\mathrm{ch}\beta)Q^m_n(\mathrm{ch}\alpha),$$

а $P^m_n(\mathrm{ch}\alpha)$ и $Q^m_n(\mathrm{ch}\alpha)$—присоединенные сферические функции Лежандра соответственно первого и второго рода.

Используя условия (1.7), из (2.2)—(2.4) приходим к двум бесконечным системам интегральных уравнений относительно $a_{ni}(t)$:

$$\mathrm{B}^j_{00}[a_{01}(t)+a_{02}(t)]+2\mathrm{B}^j_{01}[a_{11}(t)+a_{12}(t)]-\int_{\tau_1}^{t}\{A^j_{00}[a_{01}(\tau)+$$

$$+a_{02}(\tau)]+2A^j_{01}[a_{11}(\tau)+a_{12}(\tau)]\}K_2(t, \tau)d\tau=2h^j_0, \tag{2.5}$$

$$\sum_{l=n-1}^{n+1}\left\{\mathrm{B}^j_{nl}[a_{l1}(t)+a_{l2}(t)]-\int_{\tau_1}^{t}A^j_{nl}[a_{l1}(\tau)+a_{l2}(\tau)]K_2(t, \tau)d\tau\right\}=h^j_n(t)$$

$$(n=1, 2, \ldots), \quad (j=1, 2).$$

Коэффициенты и свободные члены определяются через функции

$$P^m_n(\mathrm{ch}\alpha),\ Q^m_n(\mathrm{ch}\alpha),\ \alpha^1_n(t),\ \beta^1_n(t),\ \gamma^1_n(t).$$

Пользуясь асимптотическим разложением присоединенных функций Лежандра $P^m_n(\mathrm{ch}\alpha)$, $Q^m_n(\mathrm{ch}\alpha)$ при больших значениях n, аналогично [8] доказывается квазивполне регулярность систем (2.5) при $t=\tau_1$, $t=\infty$ и в случае $K_2(t, \tau)=K(t-\tau)$.

Получены следующие оценки:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left|\frac{B^j_{n,n-1}}{B^j_{nn}}\right|+\left|\frac{B^j_{n,n+1}}{B^j_{nn}}\right|\right]=(\mathrm{ch}\,\alpha_j)^{-1}, \quad (j=1,\ 2).$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ֆ. Մ. ՓՈԼԱԴՅԱՆ

Երեք ոչ համակենտրոն շրջանագծերով սահմանափակված լայնական կտրվածքով բաղադրյալ շրջանային օղակի սեկտորի սողքը ոլորման դեպքում

Ուսումնասիրվում է ժառանգական սողքի հատկությամբ օժտված սողքի տարբեր չափեր ունեցող նյութերից կազմված կոր ձողի ոլորման խնդիրը։

Օգտվելով թորական կոորդինատային համակարգից, խնդիրը յուրաքանչյուր տիրույթում բերվում է ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը խառը եզրային պայմաններով։

Ուսումնասիրվում է այն դեպքը, երբ ուղղահայաց հատույթը սահմանափակված է երեք ոչ համակենտրոն շրջանագծերով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*, Некоторые вопросы теории ползучести, ГИТТЛ, М.—Л., 1952. [2] *W. Freiberger*. Austral. J. Scient. Res. Ser. A. v. 2, №3 (1949). [3] *М. А. Задоян* ДАН СССР, т. 223, № 2 (1975). [4] *Ф. М. Поладян*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 34, № 2 (1981). [5] *Ф. М. Поладян*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 34, № 3 (1981). [6] *Ф. М. Поладян*, ДАН АрмССР, т. 75, № 2 (1982). [7] *В. В. Новожилов*, Теория упругости, Судстройиздат, М.—Л., 1962. [8] *М. А. Задоян, Ф. М. Поладян*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 36, № 5 (1983).