ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXX 1985 4

УДК 517.518.3

МАТЕМАТИКА

Г. М. Мушегян

О единственности кратных рядов по системе Радемахара

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 25/XI 1983)

Теорема единственности для рядов по системе Радемахара формулируется следующим образом (см. [1]).

Теорема 1. *Если ряд по системе Радемахара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x) \tag{1}$$

сходится к нулю на E и $\mu(E)>2^{-1}$, то $a_n=0$, $n=1, 2, \ldots$

Для изложения дальнейших результатов сделаем следующие обозначения: пусть m, $m\geqslant 1$ целое число, через $\bar{x}^m$ обозначим m-мерный вектор из $[0, 1]^m$, а через $\bar{t}^m$ m-мерный вектор, координаты которого целые положительные числа. Если $\bar{t}^m=(n_1, n_2, \ldots, n_m)$; $\bar{x}^m=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то $r_{\bar{t}^m}(\bar{x}^m)=r_{n_1}(x_1)\cdot r_{n_2}(x_2)\ldots r_{n_m}(x_m)$. Пусть M_l, $l=1, 2, \ldots$ множества векторов типа $\bar{t}^m$, где m фиксированное число, класса $\{M_l\}_{l=1}^{\infty}$ назовем правильным, если:

а) множества M_l, $l=1, 2, \ldots$ конечны;

б) для любого вектора $\bar{t}_0^m$ существует такая подпоследовательность $\{M_{l_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что $\bar{t}_0^m\in M_{l_k}$, $k=1, 2, \ldots$

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть m фиксированное число, $\{M_l\}_{l=1}^{\infty}$ правильная последовательность, а*

$$P_l(\bar{x}^m)=\sum_{\bar{t}^m\in M_l} a_{\bar{t}^m}^{(l)} r_{\bar{t}^m}(\bar{x}^m),\ l=1, 2, \ldots \tag{2}$$

полиномы по m-кратной системе Радемахара. Если $\lim\limits_{l\to\infty} P_l(\bar{x}^m)=0$ при $\bar{x}^m\in E$, $\mu^{(m)}(E)>1-2^{-m}$ (где $\mu^{(m)}$ мера Лебега в m-мерном пространстве), то $\lim\limits_{l\to\infty} a_{\bar{t}^m}^{(l)}=0$ равен нулю на множестве меры $1-2^{-m}$. для любого фиксированного $\bar{t}^m$. Причем в формулировке этой теоремы условие $\mu^{(m)}(E)>1-2^{-n}$ нельзя ослабить,

Отметим, что вопросы единственности кратных лакунарных тригонометрических рядов были исследованы в работе [2].

Из теоремы 2 легко получить, что если m-кратный ряд некоторым методом сходится к нулю на множестве E, $\mu^{(m)}(E)>1-2^{-m}$, то коэффициенты этого ряда равны нулю.

Лемма. *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} r_n(x) \quad k=1, 2, \ldots \tag{2}$$

последовательность одномерных рядов Радемахара, а E некоторое множество с $\mu(E)>2^{-1}$. Если c) $\sum_{1}^{\infty} a_n^{(k)} r_n(x) = f_k(x)$ *почти всюду на* $[0, 1]$; d) $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ *при* $x \in E$, то: I) *для любого n существует конечный предел* $\lim_{k\to\infty} a_n^{(k)} = a_n$; II) $\sum a_n^2 < +\infty$; III) $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$ *почти всюду на* $[0, 1]$.

Доказательство леммы. Предположим, что условие I не имеет места. Пусть n_0 наименьшее число, для которого существуют число d, $d>0$ и последовательность $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющие условию $|a_{n_0}^{(k_i)} - a_{n_0}^{(k_{i+1})}| > d$, $i=1, 2, \ldots$. Выберем E_1, $E_1 \subset E$, $\mu(E_1) > 2^{-1}$ так, чтобы на E_1 ряды (2) и последовательность $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$ сходились равномерно. Через $\bar{r}_k(x)$, $\bar{f}_k(x)$ и $\bar{f}(x)$ обозначим продолженные на всю числовую прямую с периодом, равным единице, $r_k(x)$, $f_k(x)$, $f(x)$. Обозначим $E' = \{x + m : x \in E_1, \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Имеем $\sum_{1}^{\infty} a_n^{(k)} \bar{r}_n(x) = \bar{f}_k(x)$ и $\lim_{i\to\infty} \bar{f}_{k_i}(x) = \bar{f}(x)$ равномерно на E'. Из определения E' следует существование двоично иррационального числа x_0 такого, что $x_0 \in E'$ и $x_0 + 2^{-n_0} \in E'$. Ясно, что существует число J, удовлетворяющее условиям

$$|\bar{f}_{k_i}(x) - \bar{f}_{k_{i+1}}(x)| < \frac{d}{4}, \quad \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n^{(k_i)} - a_n^{(k_{i+1})}| < \frac{d}{4} \quad \text{при } J < i, \ x \in E'.$$

Отсюда

$$\frac{d}{2} > |\bar{f}_{k_i}(x_0) - \bar{f}_{k_{i+1}}(x_0) - \bar{f}_{k_i}(x_0 + 2^{-n_0}) + \bar{f}_{k_{i+1}}(x_0 + 2^{-n_0})| \geqslant$$

$$\geqslant -2 \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n^{(k_i)} - a_n^{(k_{i+1})}| + 2|a_{n_0}^{(k_i)} - a_{n_0}^{(k_{i+1})}| \geqslant \frac{3}{2} d.$$

Откуда получим $0 \geqslant d$, что невозможно. Докажем условие II. Пусть E_1 описанное выше множество. Тогда существует такое число M, $M>0$, что $|f(x)| < M$ и $|f_k(x)| < M$ при $x \in E_1$, $k=1, 2, \ldots$. Следовательно для любого k можно указать число l_k, удовлетворяющее условию

$$\left| \sum_{n=1}^{m} a_n^{(k)} r_n(x) \right| < M \quad \text{при } m > l_k \text{ и } x \in E_1. \tag{3}$$

Согласно лемме 8.3 (см. ([3]) при $\lambda = 2$) существует такое $h_0 = h_0(E_1)$, что

$$2^{-1} \mu(E_1) \sum_{n=h_0}^{m} |a_n^{(k)}|^2 \leqslant \int_{E_1} \left| \sum_{n=h_0}^{m} a_n^{(k)} r_n(x) \right|^2 dx. \tag{4}$$

Согласно условию I при достаточно большом K

$$\left|\sum_{n=1}^{h_0} a_n^{(k)} r_n(x)\right| < \sum_{n=1}^{h_0} |a_n| + \sum_{n=1}^{h_0} |a_n - a_n^{(k)}| \leqslant \sum_{n=1}^{h_0} |a_n| + M \text{ при } K < k.$$

Отсюда и из 3 получим

$$\left|\sum_{n=h_0}^{m} a_n^{(k)} r_n(x)\right| \leqslant 2M + T, \text{ при } m > \max(l_k, h_0), \quad x \in E_1.$$

Сопоставляя с 4, получим

$$2^{-1} \sum_{n=h_0}^{m} |a_n^{(k)}|^2 \leqslant (2M+T)^2 \text{ при } m > (l_k, h_0). \tag{5}$$

Ясно, что условие 5 имеет место также при $m > h_0$. Отсюда и из I легко вытекает условие II.

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x) = \psi(x) \tag{6}$$

почти всюду на $[0, 1]$.

Сначала покажем, что $\psi(x) = f(x)$ почти всюду на E. Предположим обратное, тогда существует такое число d, $d > 0$, что имеет место одно из следующих условий:

$$\mu\{x : \psi(x) - f(x) > d,\ x \in E\} > 0; \quad \mu\{x : \psi(x) - f(x) < -d,\ x \in E\} > 0.$$

Для определенности будем считать, что имеет место первое из них. Пусть E_2 некоторое множество, обладающее свойствами:

1) $E_2 \subset \{x : x \in E,\ \psi(x) - f(x) > d\}$, $\mu(E_2) > 0$;

2) ряды (2) и (6) равномерно сходятся на E_2. Пусть x_0 иррациональная точка плотности E_2, а интервал Δ такой, что

$$x_0 \in \Delta = (l/2^N,\ (l+1)/2^N), \quad \mu(E_2 \cap \Delta) > (2/(3 \cdot 2^N)) \cdot \mu(\Delta). \tag{7}$$

Выберем K настолько большим, чтобы

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n - a_n^{(k)}| < d/4, \ |f_k(x) - f(x)| < d/4 \text{ при } x \in E_2, \quad K \in k, \tag{8}$$

$$3d/4 < \psi(x) - f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} |a_n - a_n^{(k)}| + \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n - a_n^{(k)}) r_n(x) \text{ при } K < k,\ x \in E_2 \cap \Delta.$$

Отсюда и из (8) получим

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n - a_n^{(k)}) r_n(x) \geqslant d/2 \text{ при } K < k,\ x \in E_2 \cap \Delta. \tag{9}$$

Но для произвольного α и n, $0 < \alpha < 2^{-(N+1)}$, $n > N$

$r_n((l+1) \cdot 2^{-(N+1)} + \alpha) = -r_n((l+1)2^{-(N+1)} - \alpha)$, поэтому для любых $\{b_n\}_{n=N+1}^{\infty}$

$$\mu\left\{\sum_{n=N+1}^{m} b_n r_n(x) > 0,\ x \in \Delta\right\} = \mu\left\{\sum_{n=N+1}^{m} b_n r_n(x) < 0,\ x \in \Delta\right\} \text{ при } m > N \tag{10}$$

Условия (7) и (9) противоречат условию (10), следовательно $\psi(x) = f(x)$ почти всюду на E. Условие III доказано.

Пусть $F \subset E$ множество положительной меры, на котором функции $\psi(x)$ и $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$ конечны, а последовательность $f_k(x)$ равномерно сходится к $\psi(x)$. Далее пусть последовательности $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$ такие, что $0<\alpha_l<1$, $0<\varepsilon_l$, $\alpha_l \uparrow 1$, $\varepsilon_l \downarrow 0$ при $l\to\infty$. Фиксируем иррациональную точку плотности x_0 множества F. Для α_l существует такой интервал Δ_l, $\Delta_l=(l_l\cdot 2^{-m_l}, (l_l+1)\cdot 2^{-m_l})$, что $\mu(\Delta_l\cap F)>\alpha_l 2^{-m_l}$. Выберем K_l так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{m_l}|a_n^{(k)}-a_n|<\varepsilon/3, \ |f_k(x)-\psi(x)|<\varepsilon/3 \text{ при } K_l<k \ x\in F.$$

Так как число 2^{-m_l} является периодом для функции $r_n(x)$ при $n>m_l$, то для любых r, $0\leq r<2^{m_l}$, $K_l<k$ и $x\in F\cap\Delta_l$ будем иметь

$$\left|f_k\left(x+\frac{r-l_l}{2^{m_l}}\right)-\psi\left(x+\frac{r-l_l}{2^{m_l}}\right)\right|\leq\sum_{n=1}^{m_l}|a_n^{(k)}-a_n|+\left|\sum_{n=m_l+1}^{\infty}(a_n^{(k)}-a_n)r_n(x)\right|\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{3}+|f_k(x)-\psi(x)|+\sum_{n=1}^{m_l}|a_n^{(k)}-a_n|\,|r_n(x)|<\varepsilon.$$

Обозначим $F_r^{(l)}=\{x+(r-l_l)\cdot 2^{-m_l} : x\in F\cap\Delta\}$. Легко убедиться, что

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=\psi(x) \text{ при } x\in G=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{l=j}^{\infty}\left\{\bigcup_{r=1}^{2^{m_l}}F_r^{(l)}\right\} \text{ и } \mu=(G)=1.$$

Доказательство теоремы 2 проведем по индукции. При $m=1$ ее справедливость следует из леммы. Пусть теорема 2 верна при $m=k-1$, докажем при $m=k$. Пусть $\{M_l\}_{l=1}^{\infty}$ k-мерная правильная последовательность. Путем прибавления в $P_l(\overline{x}^k)$ новых слагаемых с нулевыми коэффициентами можно считать, что M_l является k-кратным прямоугольником вида

$$M_l=\{(n_1, n_2, \ldots, n_k) : 1\leq n_1\leq l_l^{(1)},\ 1\leq n_2\leq l_l^{(2)}, \ldots, 1\leq n_k\leq l_l^{(k)}\}.$$

Обозначим

$$M_l^{(k-1)}=\{(n_1, \ldots, n_{k-1}) : 1\leq n_1\leq l_l^{(1)},\ 1\leq n_2\leq l_l^{(2)}, \ldots, 1\leq n_{k-1}\leq l_l^{(k-1)}\},$$

$$E_{x_k^0}=\{\overline{x}^{(k)}=(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \overline{x}^k\in E,\ x_k=x_k^{(0)}\}.$$

Применив теорему Фубини, легко показать, что

$$\mu(G_{x_k})>2^{-1}, \text{ где } G_{x_k}=\{x_k : \mu^{(m-1)}(E_{x_k})>1-2^{-(k-1)}\}. \qquad (11)$$

$P_l(\overline{x}^k)$ запишем в следующем виде:

$$P_l(\overline{x}^k)=\sum_{\overline{i}^k\in M_l} a_{\overline{i}^k}^{(l)} r_{\overline{i}^k}(\overline{x}^k)=\sum_{\overline{i}^{k-1}\in M_l^{(k-1)}}\left(\sum_{n_k=1}^{l_l^{(k)}} a_{\overline{i}^k}^{(l)} r_{n_k}(x_k)\right) r_{\overline{i}^{k-1}}(x^{k-1}) \qquad (12)$$

При фиксированном $x_k^{(0)}\in G_{x_k}$ последовательность $k-1$-кратных полиномов $P_l(\overline{x}^k)$, $i=1, 2, \ldots$ сходится к нулю на $E_{x_k^0}$, откуда согласно индукционному предположению получим

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{n_k=1}^{l_l^{(k)}} a_{\overline{i}^k}^{(l)} r_{n_k}(x_k^0)=0 \text{ при } x_k^0\in G_{x_k}.$$

Так как $\mu(G_{x_k})>2^{-l}$, то $\lim\limits_{l\to\infty} a^{(l)}_{\bar t^k}=0$ для произвольного $\bar t^k$, что и нужно было доказать. Окончательность условия $\mu^m(E)>1-2^{-m}$ следует из того, что m-мерный полином

$$[r_1(x_1)+r_2(x_1)]\cdot[r_1(x_2)+r_2(x_2)]\dots[r_1(x_m)+r_2(x_m)]$$

сходится к 0 на множестве меры $1-2^{-m}$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ

Ռադեմախերի սիստեմով բազմապատիկ շարքերի միակության մասին

Ներկա աշխատանքում ապացուցվող արդյունքը ձևակերպելու համար բերենք հետևյալ սահմանումը։

Սահմանում: M_l, $l=1,2,\dots$, թող լինի m-չափանի դրական ամբողջ կոորդինատներով վեկտորների բազմությունների դաս։ Այդ դասը կանվանենք կանոնավոր, եթե յուրաքանչյուր M_l բազմություն վերջավոր է և կամայական $\bar t^m$ m-չափանի դրական ամբողջ կոորդինատներով վեկտորի համար գոյություն ունի $\{M_{l_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ենթադաս այնպիսին, որ $\bar t^m\in M_{l_k}$, $k=1,2,\dots$,։

Աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ։ Դիցուք $\{M_l\}_{l=1}^{\infty}$ չափանի բազմությունների կանոնավոր դաս է, իսկ

$$P_l(\bar x^m)=\sum_{\bar t^m\in M_l} a^{(l)}_{\bar t^m}\, r_{\bar t^m}(\bar x^m),\quad \text{որտեղ } \bar x^m\in[0,1]^m,\ l=1,2,\dots$$

Ռադեմախերի m-պատիկ սիստեմով բազմանդամներ են։ Եթե՝

ա) $\lim\limits_{l\to\infty} P_l(\bar x^m)=0$, երբ $\bar x^m\in E$, և *բ)* $\mu^{(m)}(E)>1-2^{-m}$

(որտեղ $\mu^{(m)}$-ը Լեբեգի չափն է m-չափանի տարածությունում), ապա կամայական $\bar t^m$ վեկտորի համար $\lim\limits_{l\to\infty} a^{(l)}_{\bar t^m}=0$։

Այս թեորեմից հետևում է, որ եթե Ռադեմախերի m—պատիկ շարքը որևէ մեթոդով զուգամիտում է զրոյի, բ) պայմանին բավարարող E բազմության վրա, ապա այդ շարքի գործակիցները հավասար են զրոյի։

Աշխատանքում ցույց է տրված նաև, որ այս ձևակերպումներում բ) պայմանը թուլացնել չի կարելի։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Б. Стечкин, П. Л. Ульянов*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 26, № 2 (1962). [2] *В. Ф. Гапошкин*, Мат. заметки, т. 16, № 6 (1974). [3] *А. Зигмунд*, в кн.: Тригонометрические ряды, т. 1, М., 1965.