ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 3

УДК 593.12.14

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР **В. А. Джрбашян**

Полный момент частицы

(Представлено 26/I 1983)

Мы знаем, что свободные частицы в соответствии с первым законом Ньютона классической механики имеют определенный, неизменяющийся со временем импульс. На языке квантовой механики это означает, что волновая функция свободной частицы есть собственная функция оператора импульса. Этот факт подтверждается использованием известного решения (1) уравнения Дирака, имеющего вид плоской волны, в качестве волновой функции электрона, для получения вероятностей и сечений всех процессов (например, известных формул Клейна—Нишины для комптон-эффекта и Бете—Гайтлера—для тормозного излучения). Известно, что сохранение импульса, т. е. обладание свободной частицей определенным, не зависящим от радиуса вектора и времени импульсом, есть следствие однородности (трансляционной симметрии) свободного пространства.

Известно также, что следствием изотропности (вращательной симметрии) пространства при наличии центрально-симметричного (кулоновского) поля является сохранение момента: частица в таком поле, при отрицательных энергиях, имеет определенный, не зависящий от $\vec{r}$ и t квадрат и проекцию момента, оператор которого есть $-i\hbar[\vec{r}\,\vec{\nabla}_r]+\vec{s}$. Состояния в атоме классифицируются по собственным значениям этих операторов и оператора энергии.

Однако в традиционной квантовой механике нет оператора момента, такого, чтобы волновая функция свободной частицы была собственной функцией его квадрата и компоненты вдоль произвольной оси z. Но свободное пространство не менее симметрично, чем пространство при наличии сферически симметричного поля. Поскольку наложение поля не увеличивает симметрию пространства (например, в присутствии второго электрона момент лишь одного электрона в атоме не будет сохраняться), то снятие поля симметрию не уменьшит.

В случае наличия центрально-симметричного поля симметрия пространства допускает вращение системы координат, оставляя ее начало в точке, где находится источник поля (ядро в случае атома). В случае свободного пространства, когда мы можем поместить начало координат где угодно (трансляционная симметрия), возможность поворота осей (вращательная симметрия) не теряется. Спрашивается, почему не должна иметь момент количества движения частица, если она свободна, т. е. если пространство, в котором она находится, по сравнению с пространством центрально-симметричного поля не менее, а более симметрично. Оператор такого момента найден в работах [1-5]

Рассмотрим поведение волновой функции свободного электрона при вращении системы координат.

Экспериментально проверенная, известная [6] волновая функция свободного электрона имеет вид

$$\psi_{\vec{p}\mu} = \frac{1}{\sqrt{V}} u_\mu \exp[i(p_i r_i - Et)/\hbar], \tag{1}$$

где биспинор $u_\mu = N\begin{pmatrix} v_\mu(\lambda) \\ w_\mu(\lambda) \end{pmatrix}$, $(N = [(1+Mc^2/E)/2]^{1/2})$ при $E>0$, v_μ — собственная функция оператора спина:

$$s_z v_\mu(\lambda) = \hbar\mu v_\mu(\lambda) \tag{2}$$

λ—спинорный индекс, $v_\mu(\lambda) = \delta_{\mu\lambda}$,

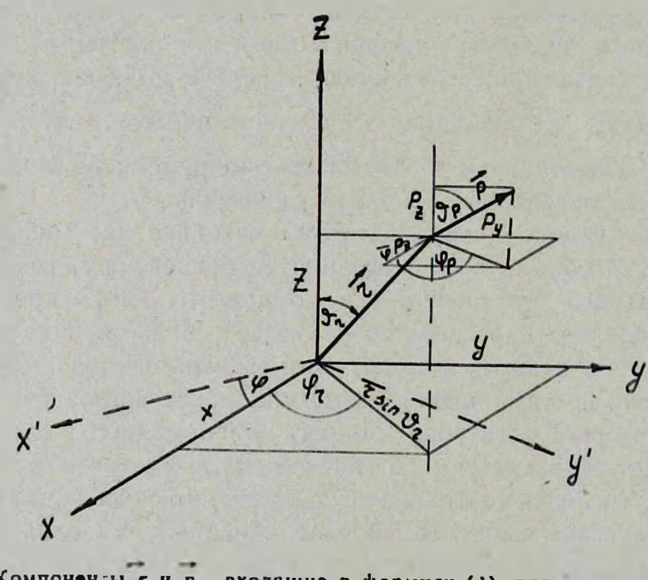
$$w_\mu(\lambda) = \sum_{\lambda'} \frac{2c(s_i p_i)_{\lambda\lambda'}}{\hbar(E+Mc^2)} v_\mu(\lambda'). \tag{3}$$

Как видно из (1) и (3), волновая функция зависит от спинора v_μ и скалярных произведений $(\vec{p}\,\vec{r})$ и $(\vec{s}\,\vec{p})$ трех векторов:

$$\vec{r}(x = r\sin\vartheta_r\cos\varphi_r,\ y = r\sin\vartheta_r\sin\varphi_r,\ z = r\cos\vartheta_r),$$

$$\vec{p}(p_x = p\sin\vartheta_p\cos\varphi_p,\ p_y = p\sin\vartheta_p\sin\varphi_p,\ p_z = p\cos\vartheta_p) \text{ и } \vec{s}.$$

Перейдем в систему координат, полученную от исходной поворотом на угол—φ вокруг оси z (см. рисунок).



Компоненты $\vec{r}$ и $\vec{p}$, входящие в формулу (1), для исходной и повернутой систем координат

В новой системе будем иметь

$$x' = r\sin\vartheta_r\cos(\varphi_r+\varphi),\ y' = r\sin\vartheta_r\sin(\varphi_r+\varphi),\ z' = z, \tag{4}$$

$$p'_x = p\sin\vartheta_p\cos(\varphi_p+\varphi),\ p'_y = p\sin\vartheta_p\sin(\varphi_p+\varphi),\ p'_z = p_z. \qquad (5)$$

Вместо первых двух компонент удобно рассматривать их комбинации

$$r_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy) = \mp r\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta_r e^{\pm i\varphi_r},\ r_0 = z, \qquad (6)$$

$$p_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(p_x \pm ip_y) = \mp p\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta_p e^{\pm i\varphi_p},\ p_0 = p_z. \qquad (7)$$

Тогда в новой системе согласно (4—7)

$$r'_{\pm 1} = e^{\pm i\varphi}r_{\pm 1},\quad r'_0 = r_0, \qquad (8)$$

$$p'_{\pm 1} = e^{\pm i\varphi}p_{\pm 1},\quad p'_0 = p_0. \qquad (9)$$

По этому же закону, как известно, преобразуются и компоненты спина ([7])

$$s_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(s_x \mp is_y),\quad s_0 = s_z, \qquad (10)$$

$$s'_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(s'_x \pm is'_y) = e^{\pm i\varphi}s_{\pm 1},\quad s'_0 = s_0. \qquad (11)$$

Спинор $v_\mu(\lambda)$ преобразуется по закону ([8])

$$v'_\mu(\lambda) = e^{i\mu\varphi}v_\mu(\lambda). \qquad (12)$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$p_l r_l = p_x x + p_y y + p_z z = -p_1 r_{-1} - p_{-1}r_1 + p_0 r_0.$$

Подставляя (8) и (9) в выражение для $p'_l r'_l$, получим

$$p'_l r'_l = -p'_1 r'_{-1} - p'_{-1}r'_1 + p'_0 r'_0 = -p_1 r_{-1} - p_{-1}r_1 + p_0 r_0 = (\vec{p}\vec{r}).$$

Таким же образом согласно (9) и (11) получится $s'_l p'_l = s_l p_l$. Следовательно, согласно (1) и (12) волновая функция в новой системе связана с исходной соотношением

$$\psi'_{\vec{p}\mu} = e^{i\mu\varphi}\psi_{\vec{p}\mu} = \sum_{\mu_1}\delta_{\mu_1\mu}e^{i\mu_1\varphi}\psi_{\vec{p}\mu_1}. \qquad (13)$$

Как известно ([9]), из условия сохранения ортонормированности волновых функций

$$\langle\psi'_{\vec{p}_1\mu_1}|\psi'_{\vec{p}_2\mu_2}\rangle = \langle\psi_{\vec{p}_1\mu_1}|\psi_{\vec{p}_2\mu_2}\rangle = \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\delta_{\mu_1\mu_2} \qquad (14)$$

следует существование унитарной матрицы $U_{\mu_1\mu}$, через которую преобразуется волновая функция при повороте системы координат

$$\psi'_{\vec{p}\mu} = \sum_{\mu_1}U_{\mu_1\mu}\psi_{\vec{p}\mu_1} \qquad (15)$$

и соответствующего унитарного оператора $\widehat{U}$

$$\psi'_{\vec{p}\mu} = \widehat{U}\psi_{\vec{p}\mu}. \qquad (16)$$

Выше (формула (13)) мы фактически нашли эту матрицу, диагональную в рассматриваемом случае поворота вокруг оси z. Теперь найдем оператор.

Нетрудно видеть, что искомым оператором $\hat{U}$ в данном случае будет произведение трех унитарных операторов

$$\hat{U}=e^{\mp\frac{\partial}{\partial\varphi_r}}e^{\mp\frac{\partial}{\partial\varphi_p}}e^{\mp(i/\hbar)s_z}. \tag{17}$$

С этой целью учтем, что согласно разложению Тейлора

$$f(x+a)=\left[1+\frac{a}{1!}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\ldots\right]f(x)=e^{a\frac{\partial}{\partial x}}f(x), \tag{18}$$

т. е. воздействие оператора $e^{a\frac{\partial}{\partial x}}$ приводит к замене x на $x+a$. Следовательно первые два множителя в (17) приведут к требуемому изменению компонент $\vec{r}$ и $\vec{p}$, согласно (4) и (5), сдвигая φ_r и φ_p на φ.

Чтобы убедиться в необходимости третьего множителя, в (17) примем во внимание, что из соотношений коммутации декартовых компонент спина

$$[s_z, s_x]=i\hbar s_y,\quad [s_z, s_y]=-i\hbar s_x \tag{19}$$

следуют соотношения коммутации для циклических компонент

$$[s_0, s_q]=\hbar q s_q,\ \text{т. е.}\ s_z s_q=s_q(s_z+\hbar q),\quad (q=0, \pm 1). \tag{20}$$

Следовательно, при коммутации с s_q s_z заменится на $s_z+\hbar q$

$$e^{\mp(i/\hbar)s_z}s_q=s_q e^{\mp(i/\hbar)(s_z+\hbar q)}=e^{iq\varphi}s_q e^{\mp(i/\hbar)s_z}. \tag{21}$$

Отсюда вытекает, что воздействие оператора $e^{\mp(i/\hbar)s_z}$ приводит к требуемому согласно (10) и (11) изменению компонент спина. Учитывая также следуемое из (2) соотношение

$$e^{\mp(i/\hbar)s_z}v_\mu(\lambda)=e^{i\mu\varphi}v_\mu(\lambda), \tag{22}$$

получим, что действительно

$$\psi'_{\vec{p}\mu}=\hat{U}\psi_{\vec{p}\mu}=e^{i\mu\varphi}\psi_{\vec{p}\mu}, \tag{23}$$

т. е. согласно (13) и (16) оператор $\hat{U}$, определяемый выражением (17), есть оператор вращения $\hat{R}_z$.

Представим этот унитарный оператор в общепринятой форме

$$\hat{R}_z=e^{i\varphi\hat{J}_z/\hbar}, \tag{24}$$

выражая через эрмитовый оператор проекции полного момента $\hat{J}_z$. Согласно (17)

$$\hat{J}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_r}-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_p}+\hat{s}_z. \tag{25}$$

Из найденного соотношения

$$e^{i\varphi\hat{J}_z/\hbar}\psi_{\vec{p}\mu}=e^{i\varphi\mu}\psi_{\vec{p}\mu}, \tag{26}$$

имеющего место при произвольном φ, следует, что

$$\hat{J}_z\psi_{\vec{p}\mu}=\hbar\mu\psi_{\vec{p}\mu}, \tag{27}$$

т. е. свободная частица имеет определенный полный момент [1-5].

Существование унитарного преобразования $U(\psi'=U\psi)$ при параллельном переносе $(U=T)$ системы координат связано с тем, что свободная частица имеет определенный импульс, а при вращении $(U=R)$—определенный полный момент.

Заметим, что выражение (25) есть z-компонента оператора полного момента

$$\hat{\vec{J}}=\hat{\vec{L}}^r+\hat{\vec{L}}^p+\hat{\vec{s}}, \text{ где } \hat{\vec{L}}^r=-i\hbar[\vec{r}\,\vec{\nabla}_r],\quad \hat{\vec{L}}^p=-i\hbar[\vec{p}\,\vec{\nabla}_p]. \tag{28}$$

В работе [1] предложен прямой метод доказательства как соотношения (27), так и

$$\hat{\vec{J}}^2\psi_{\vec{p}\mu}=\hbar^2 J(J+1)\psi_{\vec{p}\mu},\quad J=s=1/2. \tag{29}$$

Поскольку оператор, собственная функция которого есть спинор, называется оператором спина, оператор полного момента $\hat{\vec{J}}$, собственная функция проекции и квадрата которого при $J=1/2$ есть биспинор, в этом частном случае был назван оператором биспина.

В работах [2,3] показано, что сохранение J_z и $\vec{J}^2$ для свободных частиц и частиц в центрально-симметричном поле есть следствие изотропности пространства.

Теперь простым способом покажем, что волновая функция свободного электрона (1) есть собственная функция z-компоненты оператора полного момента.

С этой целью заметим, что первый спинор v_μ биспинора u_μ не зависит от углов φ_r и φ_p, поэтому согласно (2) и (25)

$$\hat{J}_z v_\mu=\hbar\mu v_\mu. \tag{30}$$

Второй спинор согласно (3) можно представить в виде

$$w_\mu=\frac{pc}{E+Mc^2}\,\frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{p}v_\mu, \tag{31}$$

где σ_x, σ_y, σ_z—матрицы Паули. Так как

$$\frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{p}v_\mu=(\sigma_x\sin\vartheta_p\cos\varphi_p+\sigma_y\sin\vartheta_p\sin\varphi_p+\sigma_z\cos\vartheta_p)v_\mu, \tag{32}$$

где ϑ_p полярный, а φ_p азимутальный углы, определяющие направление импульса в обычной трехмерной системе координат, то

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_p}+\frac{\hbar}{2}\sigma_z\right)\frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{p}v_\mu=\hbar\Big(i\sigma_x\sin\vartheta_p\sin\varphi_p-i\sigma_y\sin\vartheta_p\cos\varphi_p+$$
$$+\frac{1}{2}\sigma_z\sigma_x\sin\vartheta_p\cos\varphi_p+\frac{1}{2}\sigma_z\sigma_y\sin\vartheta_p\sin\varphi_p+\frac{1}{2}\sigma_z^2\cos\vartheta_p\Big)v_\mu. \tag{33}$$

Учитывая соотношения $\sigma_z\sigma_x=i\sigma_y$, $\sigma_z\sigma_y=-i\sigma_x$, $\sigma_z^2=1$, суммируя одноименные члены, подставляя в качестве единицы перед v_μ σ_z^2 и используя (2), последовательно из (33) получим

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_p}+\frac{\hbar}{2}\sigma_z\right)\frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{p}v_\mu=\hbar\left(\frac{i}{2}\sigma_x\sin\theta_p\sin\varphi_p-\frac{i}{2}\sigma_y\sin\theta_p\cos\varphi_p+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos\theta_p\right)v_\mu=\hbar(i\sigma_x\sigma_z\sin\theta_p\sin\varphi_p-i\sigma_y\sigma_z\sin\theta_p\cos\varphi_p+\sigma_z\cos\theta_p)\ \frac{1}{2}\sigma_z v_\mu=$$

$$=\hbar\mu(\sigma_y\sin\theta_p\sin\varphi_p+\sigma_x\sin\theta_p\cos\varphi_p+\sigma_z\cos\theta_p)v_\mu=\hbar\mu\,\frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{p}\,v_\mu. \qquad (34)$$

Поскольку w_μ согласно (31) и (32) не зависит от φ_r, то из (25) и (34) следует, что

$$\hat{J}_z w_\mu=\hbar\mu w_\mu. \qquad (35)$$

Учитывая также (30), отсюда следует

$$\hat{J}_z u_\mu=\hbar\mu u_\mu. \qquad (36)$$

Если принять во внимание, что

$$-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_r}+\frac{\partial}{\partial\varphi_p}\right)e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar}=0, \qquad (37)$$

из-за того, что в $\vec{p}\vec{r}=pr[\cos\theta_r\cos\theta_p+\sin\theta_r\sin\theta_p\cos(\varphi_r-\varphi_p)]$ углы φ_r и φ_p входят через разность $\varphi_r-\varphi_p$, то согласно (1), (25) и (36) придем к формуле (27).

Заметим, что этим же методом может быть получена и формула (29).

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից անդամ Վ. Հ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Մասնիկի լրիվ մոմենտը

Դիտելով կոորդինատների սիստեմի պտույտը, բերվում է Դիրակի հավասարման հայտնի լուծումով նկարագրվող ազատ մասնիկի՝ իմպուլսից բացի որոշակի լրիվ մոմենտ ունենալու փաստի պարզ ապացույցը։

Ցույց է տրվում նաև անմիջականորեն, որ (1) ալիքային ֆունկցիան հանդիսանում է լրիվ մոմենտի օպերատորի Z-բաղադրիչի սեփական ֆունկցիան։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 254, № 5 (1980). [2] *В. А. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР. Физика, т. 16, № 1 (1981). [3] *В. А. Джрбашян*. Препринт ЕФИ-449 (1980). [4] *V. A. Djrbashian*, Abstracts of Contributed papers IX Intern. Conf. on High Energy Phys. and Nucl. Struct., Versailles, p. 490 (1981). [5] *V. A. Djrbashian*, Abstracts of contributed papers IX Inter. Conf. on High Energy Phys. and Nucl. Struct., Versailles, p. 479 (1981). [6] *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий*, Квантовая электродинамика, Наука, М., 1969. [7] *Эдмондс*, в сб.: Деформация атомных ядер, ИЛ. М., 1958. [8] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Квантовая механика, ГИФМЛ, М., 1963. [9] *Е. Вигнер*, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, М., 1961.