ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 3

УДК 539.374

МЕХАНИКА

М. А. Задоян, Н. Б. Сафарян

Конечная деформация пластически-неоднородной полой сферы при внезапном воздействии давлений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 15/II 1984)

Исследование пластически-неоднородных тел при динамических воздействиях впервые проведено в работах Х. А. Рахматулина ([1,2]), где исходя из идеально-пластической схемы предел текучести принимается переменным по длине цилиндрического стержня. В работах ([3-9]) в основном рассматриваются идеально-пластические и линейно-упрочняющиеся среды при различных граничных и начальных условиях. Подробный анализ исследований динамических задач пластически-неоднородных тел дан в обзорных статьях Х. А. Рахматулина и Г. С. Шапиро ([10]), Н. Кристеску ([11]), в монографии В. Ольшака, Я. Рыхлевского, В. Урбановского ([12]).

1. В настоящей статье рассматривается полая сфера из пластически-неоднородного по радиусу упрочняющегося по степенному закону несжимаемого материала при внезапном воздействии на внутреннюю поверхность большого давления, которое в дальнейшем остается постоянным. Вследствие центральной симметрии задачи единственным отличным от нуля компонентом перемещения будет радиальный компонент $-u(r, t)$.

Дифференциальное уравнение движения в сферических координатах при конечных деформациях имеет вид

$$\left(1+\frac{u}{r}\right)^2\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{2}{r}\left(1+\frac{u}{r}\right)\left(1+\frac{\partial u}{\partial r}\right)(\sigma_r-\sigma_\theta)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \qquad (1)$$

закон упрочнения материала принимаем в виде

$$\sigma_0=K(r)\varepsilon_0^m, \qquad (2)$$

$$\varepsilon_0=\frac{2}{3}(\varepsilon_\theta-\varepsilon_r); \quad \sigma_0=\sigma_\theta-\sigma_r.$$

где m—параметр, а $K(r)$—известная из эксперимента функция, характеризующие неоднородность материала.

Зависимости между деформациями, перемещениями и напряжениями имеют вид

$$\varepsilon_r=\ln\left(1+\frac{\partial u}{\partial r}\right); \quad \varepsilon_\varphi=\varepsilon_\theta=\ln\left(1+\frac{u}{r}\right); \quad \sigma_\varphi=\sigma_\theta;$$

(3)

$$\sigma_r - \sigma = \frac{2}{3} K(r) \varepsilon_0^{m-1} \varepsilon_r(r, t); \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_\theta).$$

Из условия несжимаемости $\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = 0$ определяем перемещение

$$u(r, t) = \sqrt[3]{r^3 + a^3\psi(t)} - r, \tag{4}$$

где $\psi(t)$—неизвестная функция времени, которая определяется в дальнейшем.

Если ввести обозначение $x = r^3/a^3$, то с учетом соотношений (3) и (4) дифференциальное уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \frac{K_*(x)}{x+\psi} \ln^m\left(1 + \frac{\psi}{x}\right) =$$
$$= \frac{\rho a^2}{9}\left[(x+\psi)^{-\frac{4}{3}} \psi'' - \frac{2}{3}(x+\psi)^{-\frac{7}{3}} \psi'^2\right]. \tag{5}$$

Интегрируя и используя граничное условие на внутренней поверхности

$$\sigma_r = -p \quad \text{при} \quad x = 1, \tag{6}$$

где p—постоянное во времени значение давления, получаем выражение σ_r через неизвестную функцию $\psi(t)$:

$$\sigma_r = -p + \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \int_1^x \frac{K_*(x)}{x+\psi} \ln\left(1 + \frac{\psi}{x}\right) dx + \tag{7}$$
$$+ \frac{\rho a^2}{18}\left[(x+\psi)^{-\frac{4}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{4}{3}}\right] \psi'^2 - \frac{\rho a^2}{3}\left[(x+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}\right] \psi''.$$

Из условия на внешней поверхности

$$\sigma_r = 0 \quad x = \mu = b^3/a^3 \tag{8}$$

получаем уравнение относительно $\psi(t)$:

$$\left[(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}\right] \psi'' - \frac{1}{6}\left[(\mu+\psi)^{-\frac{4}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{4}{3}}\right] \psi'^2 -$$
$$- \frac{2}{\rho a^2}\left(\frac{2}{3}\right)^m \int_1^x \frac{K_*(x)}{x+\psi} \ln^m\left(1 + \frac{\psi}{x}\right) dx + \frac{3p}{\rho a^2} = 0. \tag{9}$$

Введем обозначение

$$\psi'^2 = \omega(\psi). \tag{10}$$

Уравнение (9) сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\omega}{d\psi} - \frac{1}{3} \frac{(\mu+\psi)^{-\frac{4}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{4}{3}}}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}} \omega +$$
$$+ \frac{\dfrac{6p}{\rho a^2} - \dfrac{4}{\rho a^2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^m \displaystyle\int_1^\mu \frac{K_*(x)}{x+\psi} \ln^m\left(1 + \frac{\psi}{x}\right) dx}{\left[(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}\right]} = 0. \tag{11}$$

В случае закона неоднородности

$$K(r)=k\left(\frac{a}{r}\right)^3 \tag{12}$$

получаем

$$\frac{d\omega}{d\psi}-\frac{1}{3}\,\frac{(\mu+\psi)^{-\frac{4}{3}}-(1+\psi)^{-\frac{4}{3}}}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}}-(1+\psi)^{-\frac{1}{3}}}\,\omega+ \tag{13}$$

$$+\frac{\frac{6p}{\rho a^2}+\frac{4k}{\rho a^2}\left(\frac{2}{3}\right)^m\frac{1}{m+1}\,\frac{1}{\psi}\left[\ln^{m+1}\left(1+\frac{\psi}{\mu}\right)-\ln^{m+1}(1+\psi)\right]}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}}-(1+\psi)^{-\frac{1}{3}}}=0.$$

Согласно (10) окончательное решение получаем в квадратурах:

$$t=\frac{a}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{\rho}{k}}\cdot\int\limits_0^{\psi}\sqrt{\frac{(1+z)^{-\frac{1}{3}}-(\mu+z)^{-\frac{1}{3}}}{\frac{p}{k}z-\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}\frac{1}{m+1}F(z)}}\,dz, \tag{14}$$

$$\text{где } F(z)=\int\limits_0^{z}\left[\ln^{m+1}(1+\xi)-\ln^{m+1}\left(1+\frac{\xi}{\mu}\right)\right]\frac{d\xi}{\xi}.$$

Компоненты напряжения будут

$$\sigma_r=\left\{p+\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}\frac{k}{m+1}\,\frac{1}{\psi}\left[\ln^{m+1}\left(1+\frac{\psi}{x}\right)-\ln^{m+1}(1+\psi)\right]\right\}\times$$

$$\times\frac{(x+\psi)^{-\frac{1}{3}}-(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}}}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}}-(1+\psi)^{-\frac{1}{3}}}+\frac{\rho a^2}{18}\,\omega\left\{(x+\psi)^{-\frac{4}{3}}-(1+\psi)^{-\frac{4}{3}}-\right. \tag{15}$$

$$\left.-\frac{(\mu+\psi)^{-\frac{4}{3}}-(1+\psi)^{-\frac{4}{3}}}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}}-(1+\psi)^{-\frac{1}{3}}}\left[(x+\psi)^{-\frac{1}{3}}-(1+\psi)^{-\frac{1}{3}}\right]\right\};$$

$$\sigma_\theta=\sigma_\varphi=\sigma_r+\left(\frac{2}{3}\right)^m\frac{k}{x}\ln^m\left(1+\frac{\psi}{x}\right).$$

2. Из условия $\psi'(t)=\omega=0$ определяется момент $t=t_*$ окончания этапа расширения полой сферы. Приравнивая нулю ω, определяем $\psi_*=\psi(t_*)$:

$$\psi_*=\frac{k}{p(m+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}\int\limits_0^{\psi_*}\left[\ln^{m+1}(1+z)-\ln^{m+1}\left(1+\frac{z}{\mu}\right)\right]\frac{dz}{z}. \tag{16}$$

Тогда из (14) определяем

$$t_*=\frac{a}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{\rho}{k}}\int\limits_0^{\psi_*}\sqrt{\frac{(1+z)^{-\frac{1}{3}}-(\mu+z)^{-\frac{1}{3}}}{\frac{p}{k}z-\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}\frac{1}{m+1}F(z)}}\,dz. \tag{17}$$

При $t>t_*$ происходит разгрузка, подчиняющаяся линейному закону:

$$\sigma_\theta-\sigma_r-(\sigma_\theta^*-\sigma_r^*)=2G[\varepsilon_\theta-\varepsilon_r-(\varepsilon_\theta^*-\varepsilon_r^*)]. \tag{18}$$

Здесь символом (*) обозначены напряжения и деформации в момент начала разгрузки. Для этого момента имеем

$$\sigma_\theta^* - \sigma_r^* = \left(\frac{2}{3}\right)^m \frac{k}{x} \ln^m\left(1 + \frac{\psi}{x}\right); \qquad \varepsilon_\theta^* - \varepsilon_r^* = \ln \frac{x}{x+\psi_*}.$$

Тогда из (19) находим

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2G \ln \frac{x+\psi_*}{x+\psi} - \left(\frac{2}{3}\right)^m \frac{k}{x} \ln^m\left(1 + \frac{\psi_*}{x}\right). \tag{19}$$

Подставляя (19) в уравнение движения, получаем

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial x} + \frac{4G}{3(x+\psi)} \ln \frac{x+\psi_*}{x+\psi} - \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \frac{k}{x(x+\psi)} \ln^m\left(1 + \frac{\psi_*}{x}\right) =$$

$$= \frac{\rho a^2}{9}\left[(x+\psi)^{-\frac{4}{3}} \psi'' - \frac{2}{3}(x+\psi)^{-\frac{7}{3}} \psi'^2\right]. \tag{20}$$

Интегрируя и учитывая условие на внутренней поверхности, в этапе разгрузки получаем

$$\sigma_r = -p - \frac{4G}{3}\int_1^x \frac{\ln(x+\psi_*)}{x+\psi} dx + \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} k \int_1^x \frac{\ln^m\left(1+\frac{\psi_*}{x}\right)}{x(x+\psi)} dx +$$

$$+ \frac{2}{3} G\left[\ln^2(x+\psi) - \ln^2(1+\psi)\right] + \frac{\rho a^2}{18}\left[(x+\psi)^{-\frac{4}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{4}{3}}\right]\psi'^2 - \tag{21}$$

$$- \frac{\rho a^2}{3}\left[(x+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}\right]\psi''.$$

Используя граничное условие на внешней поверхности сферы и обозначение (10), приходим к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\omega}{d\psi} - \frac{1}{3}\,\frac{(\mu+\psi)^{-\frac{4}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{4}{3}}}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}} +$$

$$+ \frac{\frac{4G}{\rho a^2}\left[\frac{3p}{2G} - \ln^2(\mu+\psi) + \ln^2(1+\psi) + Q(\psi)\right]}{(\mu+\psi)^{-\frac{1}{3}} - (1+\psi)^{-\frac{1}{3}}} = 0, \tag{22}$$

где

$$Q(\psi) = 2\int_1^\mu \frac{\ln(x+\psi_*)}{x+\psi} dx - \left(\frac{2}{3}\right)^m \frac{k}{G} \int_1^\mu \frac{\ln^m\left(1+\frac{\psi_*}{x}\right)}{x(x+\psi)} dx.$$

Обратная пластическая деформация возникает в момент времени t_{**}, при котором $\psi'(t)=0$. Тогда значение $\psi_{**}=\psi(t_{**})$ определяется из условия

$$\omega(\psi_{**}) = 0.$$

Момент окончания разгрузки и начала вторичного пластического состояния будет

$$t_{**}=t_*+\int\limits_{\psi_{*}}^{\psi_{**}}\frac{dz}{\sqrt{\omega(z)}}. \tag{23}$$

Проведены численные расчеты при следующих значениях параметров: $a=10$; $m=1/3$; $b=2a$; $p=0,42k$. На рис. 1 показан график зависимости ψ от $t\cdot\left(\frac{6k}{\rho a^2}\right)$, полученный с использованием формул (14)

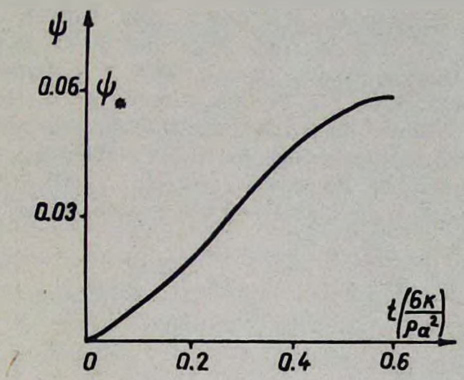

Рис. 1

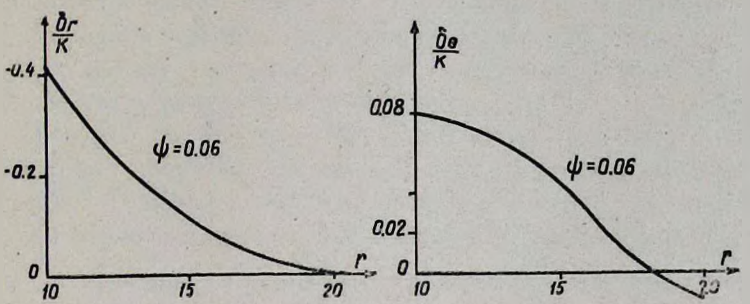

Рис. 2

и (16), а на рис. 2—графики безразмерных напряжений σ_r/k и σ_θ/k в этапе нагружения, полученные при помощи формулы (15).

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ, Ն. Բ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Պլաստիկորեն անհամասեռ սնամեջ գնդի վերջավոր դեֆորմացիան ճնշման հանկարծակի ազդեցության դեպքում

Ընդունելով նյութը պլաստիկորեն անհամասեռ և անսեղմելի, ուսումնասիրվում է սնամեջ գնդի վերջավոր դեֆորմացիան, ճնշման հանկարծակի ազդեցության դեպքում։ Ճնշումը ազդեցության ընթացքում մնում է հաստատուն։ Բեռնավորման միջակայքում նյութը ենթարկվում է աստիճանային ամրա-

պընդման օրենքին։ Լարումները և ռադիալ տեղափոխությունը արտահայտված են $\varphi(t)$ ֆունկցիայով։ $\varphi(t)$ ֆունկցիայի համար ստացվում է երկրորդ կարգի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարում, որի լուծումը տրված է կվադրատուրայով։

Ուսումնասիրվում է նաև սնամեջ գնդի բեռնաթափման վիճակը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Х. А. Рахматулин,* ПММ, т. 10, № 3 (1946). [2] *Х. А. Рахматулин,* ПММ, т. 14, № 1 (1950). [3] *В. С. Ленский,* Вестн. МГУ, № 3, 1949. [4] *С. Д. Мочалов,* Уч. зап. Томск. ин-та, № 25, 1955. [5] *П. Пежина,* Arch. Mech Stos. v. 11, № 5 (1959). [6] *П. Пежина,* Основные вопросы вязкоупругости. Мир, М., 1968. [7] *R. Gutowski, S. Kaliski, I. Osieski,* Biuletyn WAT, №2, 1959. [8] *В. Н. Кукуджанов, Л. В. Никитин,* Изв. АН СССР, №4, 1960. [9] *М. А. Задоян,* Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. №3 (1960). [10] *Х. А. Рахматулин, Г. С. Шапиро,* Изв. АН СССР, ОТН, №2, 1955. [11] *M. Cristescu,* In: Proc. Sec. Symposium, Pergamon Press. N. Y. 1960. [12] *В. Ольшак, Я. Рыхлевский, В. Урбановский,* Теория пластичности неоднородных тел. Мир, М. 1965.