УДК 517.988

МАТЕМАТИКА

А. Г. Камалян

О нетеровости почти теплицевых операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 19/VII 1984)

В данной работе изучаются операторы парного типа, порожденные матрицами $\|s_{n,m}\|$, элементы которых удовлетворяют тождеству

$$s_{n+1,m+1} - s_{n,m} = c_n d_m, \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Эти операторы содержат в себе теплицевы (так как для последних имеет место $s_{n+1,m+1} - s_{n,m} = 0$) и являются дискретным аналогом „почти разностных“ операторов (см. (1)).

1°. Пусть Γ — единичная окружность комплексной плоскости. Обозначим через $PC(\Gamma) = PC$ алгебру всех кусочно-непрерывных и непрерывных слева функций на Γ . Как известно (см. например (2), с. 75), замыкание этой алгебры по норме $L_\infty(\Gamma)$, совпадает с множеством $\overline{PC}$ линейчатых функций на Γ .

Каждой функции $a \in \overline{PC}$ сопоставим (см. (2)) функцию $a^p: \Gamma \times |0,1| \rightarrow C(1 < p < \infty)$, определенную равенством

$$a^p(t, \mu) = a(t+0)f_p(\mu) + a(t-0)(1-f_p(\mu)) \quad (t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1),$$

где $f_p(\mu) = \mu$, если $p = 2$, и $f_p(\mu) = \sin(\theta\mu) \exp[i\theta(\mu-1)] / \sin\theta$ при $\theta = (p-2)\pi/p$, если $p \neq 2$.

Функция $a \in \overline{PC}$ называется $\{p\}$ -неособенной, если $a^p(t, \mu) \neq 0 (t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1)$. Для $\{p\}$ -неособенной функции $a \in PC$ $\{p\}$ -индексом (обозначается $\text{ind } a^p$) называется индекс Коши (см. (2), с. 79) кривой, совпадающей с образом $a(t, \mu) (t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1)$ и ориентированной естественным способом. Пусть $a \in \overline{PC}$, $a_n \in PC$ и $\lim \|a - a_n\|_{L_\infty} = 0$. Нетрудно проверить, что, если функция a $\{p\}$ -неособенная, то начиная с некоторого n функции a_n также являются $\{p\}$ -неособенными и числа $\text{ind } a_n^p$ стабилизируются. Положим $\text{ind } a^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind } a_n^p$.

Обозначим через $Fl_p (1 \leq p \leq 2)$ банахово пространство всех функций $f \in L_1(\Gamma)$, коэффициенты Фурье $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, которых удовлетворяют условию $\|f\|_{Fl_p} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^p \right)^{1/p} < \infty$.

Множество функций $a \in L_\infty(\Gamma)$, для которых оператор aI умножения на функцию a ограничен в пространстве Fl_p , будем обозначать через $R_p (1 \leq p \leq 2)$. В случае $2 \leq p \leq \infty$ через R_p будем обозначать множество $R_q (p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Условимся еще о следующих обоз-

начениях. Пусть Ω некоторое подмножество $[1, 2]$ и $p \in (1, 2)$; положим

$$R_{\pm} = \bigcap_{p \in \Omega} R_p, \quad R_{\langle p \rangle} = \bigcup_{s > 0} R_{(p-s, p+s)}, \quad C_{\langle p \rangle} = C(\Gamma) \cap R_{\langle p \rangle}, \quad \overline{PC}_{\langle p \rangle} = \overline{PC} \cap R_{\langle p \rangle}.$$

2°. Пусть $h_k(t), c_k(t), d_k(t) \in L_{\infty}(\Gamma)$ и $\{h_j^k\}_{j=-\infty}^{\infty}, \{d_j^k\}_{j=-\infty}^{\infty}, \{c_j^k\}_{j=-\infty}^{\infty}$ ($k=1, 2$) — их коэффициенты Фурье. Введем функции

$$a(t) = h_1(t) + c_1(t)d_1(t^{-1}), \quad b(t) = h_2(t) + c_2(t)d_2(t^{-1}). \quad (2)$$

Обозначим через L и L' операторы, определенные в $L_p (1 \leq p \leq \infty)$ соответственно следующими системами уравнений:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{n,m} y_m = r_n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (3)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} s'_{n,m} y_m = r_n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2 \dots), \quad (4)$$

где $s_{n,m}(s'_{n,m}) = h_{n-m}^1 + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{n+k}^1 d_{m+k}^1$ при $m(n) \geq 0$ и $s_{n,m}(s'_{n,m}) = h_{n-m}^2 + \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k}^2 d_{m+k}^2$ при $m(n) < 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть функции $h_k, c_k \in \overline{PC}_{\langle p \rangle} (h_k, d_k \in \overline{PC}_{\langle p \rangle}), d_k \in C_{\langle p \rangle} (c_k \in C_{\langle p \rangle})$ ($k=1, 2; 1 < p < \infty$). Для того чтобы оператор $L(L')$ был нетеровым в пространствах $L_p (1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$a(t+0)b(t-0)f_q(\mu) + a(t-0)b(t+0)(1-f_q(\mu)) \neq 0 \quad (5)$$

$$(|t|=1, 0 \leq \mu \leq 1, p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

Если условие (5) выполнено и $g = a/b$, то

$$\text{ind } L = -\text{ind } g^q (\text{ind } L' = -\text{ind } g^q). \quad (6)$$

Доказательство теоремы основывается на сведении операторов L и L' к сингулярным интегральным операторам в пространствах Fl_p (см. гл. XIV (3)).

Заметим, что теорема остается справедливой и в случае одностороннего уравнения типа Винера—Хопфа; при этом в формулах (5) и (6) необходимо брать $b(t) \equiv 1$.

3°. В работах (4,5) рассматривался оператор типа Винера—Хопфа вида

$$(Uy)_n = y_n - e^{i\omega n} \sum_{m=0}^{\infty} v_{n,m} y_m, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где $v_{n,m} \stackrel{\text{def}}{=} u_{n-m}$ — элементы матрицы, а $\omega/2\pi$ либо рациональное число, либо иррациональное число, медленно приближаемое рациональными числами, т. е. $|\omega/2\pi - m/n| > C/h^{\gamma}$ для любых целых $m, n > 0$ (C, γ постоянные, зависящие только от ω).

Здесь мы рассмотрим более общий случай, когда в уравнении

(7) $v_{n,m}$ удовлетворяют тождеству (1), что эквивалентно представлению

$$v_{n,m} = h_{n-m} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{n-k} d_{m+k}, \quad (8)$$

где $\{h_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{d_n\}_{-\infty}^{\infty} \in l_1$ являются коэффициентами Фурье функций $h(t)$, $c(t)$, $d(t)$.

Введем функцию

$$a(t) = h(t) + c(t)d(t^{-1}). \quad (9)$$

На основе результатов (4,5) доказывается следующая

Теорема 2. Пусть имеет место одно из следующих условий:

а) $\omega/2\pi$ — рациональное число, $\omega/2\pi = r/m$; $(r, m) = 1$;

б) $\omega/2\pi$ — иррациональное число, медленно приближаемое рациональными.

Для того чтобы оператор U вида (7), (8) был нетеровым в пространствах l_p ($1 < p < \infty$), необходимо и достаточно, чтобы в

случае а) $\varepsilon(t) = 1 - \prod_{k=0}^{m-1} a(te^{i\omega k})$, при этом индекс χ оператора U вы-

числяется по формуле $\chi(U) = -1/m \operatorname{Ind} \varepsilon(t)$; в случае б): $\rho_{a(t)} =$

$$\stackrel{\text{def}}{=} 1/2\pi \int_0^{2\pi} \ln |a(e^{i\theta})| d\theta \neq 0, \text{ при этом } \chi(U) = \begin{cases} 0 & \text{если } \rho_{a(t)} < 0 \\ -\operatorname{Ind} a(t) & \text{если } \rho_{a(t)} > 0 \end{cases}.$$

Аналогичный результат может быть получен и для более общих операторов (типа парных).

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Ա. Հ. ՔԱՄԱԼՅԱՆ

Համարյա տյուպիցյան օպերատորների նյութերության մասին

Աշխատանքի 1^o—2^o կետերում դիտարկվում են դույզ տիպի դիսկրետ օպերատորներ, որոնք ծնված են $\|S_{n,m}\|$ համարյա տյուպիցյան մատրիցներով, այսինքն¹

$$S_{n+1, m+1} - S_{n,m} = c_n d_m \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Այդպիսի օպերատորների համար գտնված են նյութերության պայմանները և տրվում են ինդեքսի հաշվման բանաձևեր:

Խնդիրը դիտարկվում է l_p ($1 < p < \infty$) տարածություններում գործակիցների գծավոր ֆունկցիաների դասում (տես 1^o):

Այնուհետև (3^o) ուսումնասիրվում է Վինների—Հոպֆի տիպի (7) օպերատորը և ընդհանրացվում են (4,5) աշխատանքների արդյունքները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Б. Нерсисян, Г. А. Чернявская, ДАН АрмССР, т. 79, № 1 (1984). ² Н. Бурбаки, Функции действительного переменного, Наука, М., 1965. ³ И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в теорию одномерных сингулярных операторов, Штуттгарт, Кишинев, 1973. ⁴ Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, ДАН СССР, т. 200, № 1 (1971). ⁵ И. К. Карапетянц, ДАН СССР, т. 216, № 1 (1974).