ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 3

УДК 517.937

МАТЕМАТИКА

В. И. Копанева

Задача Коши—Гурса для телеграфного уравнения с абстрактным оператором

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 18/XI 1983)

Рассмотрим телеграфное уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-Au, \tag{1}$$

где $u(x, t)$—искомая функция со значениями в банаховом пространстве E, а A—линейный оператор, действующий в этом пространстве, с областью определения $D(A)$.

Задачей Коши—Гурса ([1-3]) для уравнения (1) называется задача о нахождении его решения внутри угла $x\geqslant 0$, $-x\leqslant t\leqslant 0$, удовлетворяющего условиям

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}=\psi(x) \quad \text{и} \quad u(x, -x)=\varphi(x). \tag{2}$$

В характеристических координатах $t_1=\dfrac{x+t}{2}$, $t_2=\dfrac{x-t}{2}$ эта задача формулируется так: требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1}-Au=0 \tag{3}$$

внутри угла $R=\{(t_1, t_2): t_2\geqslant t_1\geqslant 0\}$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{t_1=0}=\varphi(t_2), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t_1}-\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|_{t_1=t_2}=\psi(t_1). \tag{5}$$

Определение. Функция $u(t_1, t_2)$ называется решением задачи (3)—(5), если: а) $u(t_1, t_2)\in C^1(R; E)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1}\in C(R; E)$; б) область значений функции $u(t_1, t_2)$ содержится в $D(A)$; функция $u(t_1, t_2)$ удовлетворяет уравнению (3) и условиям (4), (5). При этом естественно предполагается, что $\varphi(t_2)\in C([0; \infty[; E)$ и $\psi(t_1)\in C([0; \infty[; E)$. Ниже будут получены формулы для решения задачи (3)—(5) в предположении, что оператор A является производящим оператором регулярной косинус-функции ([4,5]). Сначала рассмотрим скалярную задачу (3)—(5). Справедлива

Теорема 1. *Пусть $E=R$. Если в задаче* (3)—(5) $A=c^2$, *где c — произвольное комплексное число,* $\varphi(t_2)\in C^1[0;\infty[$, *а* $\psi(t_1)\in C[0;\infty[$, *то решение задачи* (3)—(5) *существует и единственно.*

Применение метода Римана дает возможность написать явную формулу, представляющую решение задачи (3)—(5) в скалярном случае. Эта формула имеет вид:

$$u(t_1, t_2)=\frac{\varphi(0)R(0,0;t_1,t_1)}{2}+\int_0^{t_2} R(0,y;t_1,t_1)\varphi'(y)dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t_1} R(x,x;t_1,t_1)\psi(x)dx+\frac{1}{2}\int_0^{t_1} R(x,x;t_1,t_2)\psi(x)dx-$$

$$-\int_0^{t_1}\left(\left.\frac{\partial R(x,y;t_1,t_2)}{\partial x}\right|_{x=y}-\left.\frac{\partial R(x,y;t_1,t_2)}{\partial y}\right|_{x=y}\right)\left(\frac{\varphi(0)R(0,0;x,x)}{2}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{x} R(0,y;x,x)\varphi'(y)dy+\frac{1}{2}\int_0^{x} R(s,s;x,x)\psi(s)ds\right)dx,$$

где $R(x,y;t_1,t_2)$ — функция Римана уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-c^2u=0$.

Напомним, что преобразование $S(t):R\to L(E)$ называется регулярной косинус-функцией, если для любых $s,t\in R$: $S(t+s)+S(t-s)=2S(t)S(s)$ и $S(t)x\to x$ при $t\to 0$, $t\in R$, для любого $x\in E$. Производящий оператор косинус-функции определяется формулой

$$Ax=2\lim_{t\to 0}\frac{S(t)x-x}{t^2}=S''(0)x.$$

Введем в рассмотрение следующую оператор-функцию:

$$R(x,y;t_1,t_2)\psi=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}}S(2\sqrt{(t_1-x)(t_2-y)}\eta)\psi d\eta,$$

($\psi\in E$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $t_1\geqslant x$, $t_2\geqslant y$), которую назовем функцией Римана уравнения (3).

Лемма. 1. *Функция Римана обладает свойствами:*

а) $R(x,y;t_1,t_2)\psi|_{t_1=x}=R(x,y;t_1,t_2)\psi|_{t_2=y}=\psi$;

б) *если* $\psi\in D(A)$, *то*

$$\frac{\partial^2[R(x,y;t_1,t_2)\psi]}{\partial t_2\partial t_1}-AR(x,y;t_1,t_2)\psi=0;$$

в) *если* $\psi\in D(A^2)$, *то*

$$\frac{\partial^3[R(x,y;t_1,t_2)\psi]}{\partial x\partial t_2\partial t_1}=\frac{\partial^3[R(x,y;t_1,t_2)\psi]}{\partial t_2\partial t_1\partial x};$$

$$\frac{\partial^3[R(x,y;t_1,t_2)\psi]}{\partial y\partial t_2\partial t_1}=\frac{\partial^3[R(x,y;t_1,t_2)\psi]}{\partial t_2\partial t_1\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\left[\frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\psi)}{\partial x}\bigg|_{x=y} - \frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\psi)}{\partial y}\bigg|_{x=y}\right]\Bigg|_{t_1=x=y} = -A\psi.$$

Доказательство леммы 1 основано на применении свойств регулярной косинус-функции и ее производящего оператора. С помощью леммы 1 доказывается следующая

Теорема 2. *Предположим, что оператор A является производящим оператором регулярной косинус-функции $S(t)$, функция $\psi(t_1)$ непрерывна на $[0; \infty[$, принимает значения в $D(A^2)$ и $A^2\psi(t_1) \in C([0; \infty[; E)$. Тогда функция*

$$u(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} [R(x, x; t_1, t_1) + R(x, x; t_1, t_2)]\psi(x)dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left(\int_0^x R(s, s; x, x)\left[\frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\psi(s))}{\partial x}\bigg|_{x=y} -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\psi(s))}{\partial y}\bigg|_{x=y}\right]ds\right)dx$$

является решением задачи (3)—(5) *для случая* $\psi(t_1) \equiv 0$.

При рассмотрении абстрактной задачи (3)—(5) для случая $\psi(t_1) \equiv 0$ на оператор A налагаются дополнительные условия.

Теорема 3. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям теоремы* 1.1 *из* ([6]), *функция $\varphi(t_2)$ непрерывно дифференцируема на $[0; \infty[$, а $A^2\varphi'(t_2) \in C([0; \infty[; E)$. Тогда функция*

$$v(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(R(0, 0; t_1, t_2) + R(0, 0; t_1, t_1))\varphi(0) + \int_0^{t_1} R(0, y; t_1, t_1)\varphi'(y)dy +$$

$$+\int_0^{t_2} R(0, y; t_1, t_2)\varphi'(y)dy - \frac{1}{2}\int_0^{t_1} R(0, 0; x, x)\left(\frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\varphi(0))}{\partial x}\bigg|_{x=y} -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\varphi(0))}{\partial y}\bigg|_{x=y}\right)dx - \int_0^{t_1}\left(\int_0^x R(0, y_1; x, x)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\varphi'(y_1))}{\partial x}\bigg|_{x=y} - \frac{\partial(R(x, y; t_1, t_2)\varphi'(y_1))}{\partial y}\bigg|_{x=y}\right)dy_1\right)dx$$

является решением задачи (3)—(5) *для случая* $\psi(t_1) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 2 основано на использовании леммы 1 и существенно зависит от результатов, полученных для скалярной задачи (3)—(5).

Как показано в ([7]), неограниченный нормальный оператор A в гильбертовом пространстве X является производящим оператором регулярной косинус-функции тогда и только тогда, когда существует $\omega \geqslant 0$ такое, что $z^2 \in \rho(A)$ для любого $z \in C$, $\operatorname{Re} z > \omega$. Очевидно, что этому условию удовлетворяет любой полуограниченный сверху самосопряженный оператор A. Заметим, что условиям теоремы 1.1 из [6] удовлетворяет любой оператор A вида $A = B^2$, где B—производящий оператор равностепенно непрерывной группы [4]. В заключение приведем конкретный пример задачи (1)—(2).

Пусть Ω—ограниченная область в R^3, граница которой является поверхностью класса $C^{2+\alpha}(\alpha > 0)$. В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ определим оператор A следующим образом:

$$D(A) = \{ f : f \in \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \}, \tag{6}$$

$$Af = \Delta f, \quad f \in D(A). \tag{7}$$

Согласно [8,9] A самосопряжен и $(Ax, x) \leqslant 0$ для любого $x \in D(A)$. Следовательно, A является производящим оператором регулярной косинус-функции. Более того, оператор A удовлетворяет условиям теоремы 1.1 из [6]. Действительно, $A = (i\sqrt{-A})^2$, а в силу [10] оператор $i\sqrt{-A}$ является производящим оператором равностепенно непрерывной группы. В случае, когда $E = L_2(\Omega)$, а оператор A определяется формулами (6), (7), задача (1), (2) заключается в следующем.

Требуется найти функцию $u(x, t; x_1, x_2, x_3)$, являющуюся решением уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ в области $x \geqslant 0$, $-x \leqslant t \leqslant 0$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ и обладающую свойствами:

а) $u(x, t; x_1, x_2, x_3)$ относительно переменных x, t представляет собой абстрактную функцию со значениями в пространстве $W_2^2(\Omega)$;

б) $\left. \dfrac{\partial u(x, 0; x_1, x_2, x_3)}{\partial t} \right|_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \\ x \in [0; \infty[}} = \psi(x, x_1, x_2, x_3)$, где $\psi(x) \in C([0; \infty[;$ $W_2^4(\Omega))$; $\psi|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta\psi|_{\partial\Omega} = 0$;

в) $u(x, -x; x_1, x_2, x_3)|_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \\ x \in [0, \infty[}} = \varphi(x, x_1, x_2, x_3)$, где $\varphi(x, x_1, x_2, x_3) \in$ $\in C^1([0; \infty[; L_2(\Omega))$ и $\dfrac{\partial \varphi'(x)}{\partial x}$ непрерывная функция со значениями в $W_2^4(\Omega)$, $\left. \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\partial\Omega} = 0$, $\left. \Delta \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\partial\Omega} = 0$.

Из теорем 2, 3 следует существование решения описанной задачи.

Автор благодарен С. Г. Крейну за постоянное внимание к данной работе.

Воронежский лесотехнический институт

Վ. Ի. ԿՈՊԱՆԵՎԱ

Կոշի—Գուրսայի խնդիրը աբստրակտ օպերատորով հեռագրական հավասարման համար

Դիտարկվում է հեռագրական հավասարումը հետևյալ տեսքով

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-Au,$$

որտեղ՝ $u(x, t)-E$ *բանախյան տարածության մեջ ընդունող արժեքներով որոնելի ֆունկցիան է, իսկ* A*—այդ տարածության մեջ գործող* $D(A)$ *որոշման տիրույթով գծային օպերատոր։*

Հեռագրական հավասարման համար Կոշի—Գուրսայի խնդիր կոչվում է՝ այդ հավասարման այնպիսի լուծում գտնելը $x\geqslant 0,\ -x\leqslant t\leqslant 0$ *անկյան մեջ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին*

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}=\psi(x),\quad u(x, -x)=\varphi(x):$$

Ենթադրելով, որ A*—աեգուլյար կոսինուս ֆունկցիայի ծնող օպերատոր է, ստացվել է բանաձև, որը բացահայտ տեսքով ներկայացնում է Կոշու—Գուրսայի խնդրի լուծումը* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *ֆունկցիաների և հեռագրական հավասարման «Ռիմանի ֆունկցիայի» միջոցով։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Л. Соболев*, Уравнения математической физики, Наука, М., 1966. [2] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, т. 2, Наука, М., 1974. [3] *М. М. Смирнов*, Уравнения смешанного типа, Наука, М., 1970. [4] *M. Sova*, Rozprawy Matematyczne, v. 49, p. 1—46 (1966). [5] *H. O. Fattorini*, Journal of Differential Equations. v. 5, №1 (1969). [6] *H. O. Fattorini*, Journal of Differential Equations, v. 6, №1 (1969). [7] *D. Lutz-Lincei*, Rend. Sc. fis. mat. e nat., v. 63, novembre (1977). [8] *Р. Рихтмайер*, Принципы современной математической физики, Мир, М., 1982. [9] *Ф. Рисс, Сёкефальви-Надь*, Лекции по функциональному анализу. Мир, М., 1979. [10] *К. Иосида*, Функциональный анализ, Мир, М., 1967.