ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 2

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. В. Метлов

О наращивании тел при конечных деформациях

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 13/I 1984)

Рассмотрена в общем виде постановка задачи о нахождении напряженно-деформированного состояния наращиваемого тела, подверженного конечным деформациям. Приведено решение задачи о наращивании неоднородного вязкоупругого цилиндра, находящегося под действием внутреннего и внешнего давления, а также осевой силы.

1. *Описание движения частиц наращиваемого тела. Определяющее уравнение.* Под наращиваемым телом будем понимать тело, масса которого непрерывно растет вследствие присоединения к нему (зарождения) новых элементов на части его поверхности (поверхности роста). Модель непрерывно-наращиваемого тела может описывать процессы последовательного возведения сооружений, постепенного образования твердого тела при фазовом переходе, рост кристаллов и т. п.

Для фиксированных (ненаращиваемых) тел принято отсчетное описание движения $\boldsymbol{x}=\chi(t, \boldsymbol{X})$, где $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор точки (частицы) в актуальной конфигурации, а $\boldsymbol{X}$ — радиус-вектор точки в фиксированной отсчетной конфигурации. При этом определяющее уравнение достаточно общего вида записывается в форме ([1])

$$\boldsymbol{T}=\Phi_\varkappa(t-t_0, \boldsymbol{F}^t), \quad \boldsymbol{F}(t)=\nabla_X\chi(t, \boldsymbol{X}). \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{T}$ — тензор напряжений Коши, $\Phi_\varkappa$ — функционал, зависящий от выбранной отсчетной конфигурации $\varkappa$, $\boldsymbol{F}^t$ — предыстория до момента t градиента $\boldsymbol{F}(\tau)$, t_0 — момент времени изготовления тела.

Особенность наращиваемого тела состоит в том, что для него невозможно зафиксировать какую-либо отсчетную конфигурацию его частиц, поскольку оно непрерывно пополняется новыми частицами. В качестве метки зародившейся частицы в наращиваемом теле в общем случае служит тройка чисел $(\tau^*, u_1, u_2)=\xi$, где τ^* — момент зарождения частицы, (u_1, u_2) — криволинейные координаты частицы на поверхности роста $S^*(\tau^*)$. Поскольку в одной и той же точке пространства могут зародиться в различные моменты разные частицы или даже может происходить непрерывное зарождение частиц в одном месте, то начальное положение частицы $\boldsymbol{X}(\xi)$, вообще говоря, не может служить меткой частицы. Разрешая относительно ξ уравнение $\boldsymbol{x}=\chi(t, \xi)$, где χ — функция движения частицы, и подставляя $\xi=\xi(t, \boldsymbol{x})$ в функцию скорости частицы $\dot\chi=\partial\chi(t, \xi)/\partial t$, получим пространственное поле скоростей $\dot{\boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{x})$ такое, что $\dot{\boldsymbol{x}}(t, \chi)=\dot\chi$. Если задано пространственное поле $\dot{\boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{x})$, то движение χ находится интегрированием обыкновенной системы $d\chi/dt=\dot{\boldsymbol{x}}(t, \chi)$, $\chi(\tau^*)=\boldsymbol{X}(\xi)$.

Градиент F в (1) удовлетворяет уравнению [1]

$$\dot{F}=GF,\quad \dot{F}=\partial F(t,\ X)/\partial t,\quad G=[\nabla_x \dot{x}(t,\ x)]\Big|_{x=\chi(t,\ X)}. \tag{2}$$

Решение (2) с начальным условием $F(t_0)=F_0$ запишем в форме мультипликативного интеграла [2] (I — единичный тензор):

$$F(t)=Q(t,t_0)F_0,\quad Q=(t,\ t_0)=\int\limits_{t_0}^{t}(I+G(\tau)d\tau)=\lim_{\max\Delta\tau_k\to 0}\prod_{\tau_k=t_0}^{t}(I+G(\tau_k)\Delta\tau_k).$$

Используя известный функционал Φ в (1), удовлетворяющий условию независимости от системы отсчета [1], запишем определяющее уравнение для наращиваемого тела в форме

$$T(t,\xi)=T_0(\xi)+\Phi(t-\tau^*,\ F'),\quad F(t,\xi)=Q(t,\xi)F_0(\xi),$$
$$Q(t,\xi)=\int\limits_{\tau^*}^{t}(I+G(\tau,\xi)d\tau),\quad G(t,\xi)=[\nabla_x\dot{x}(t,x)]\Big|_{x=\chi(t\ \xi)}. \tag{3}$$

Начальное напряженное состояние в зародившемся элементе должно удовлетворять условию равновесия с внешним силовым воздействием на поверхность роста $S^*(t)$ (с нормалью n):

$$T(\tau^*,\ \xi)n\equiv[T_0(\xi)+\Phi(0,\ F_0(\xi))]n=P(\tau^*,\ x)\Big|_{S^*(\tau^*)}, \tag{4}$$

где $P(t,x)$ — вектор напряжения, действующего на $S^*(t)$. Для задания прочих компонент начального напряженного состояния нужно привлекать дополнительные физические соображения или измерения [3]. В механической модели мы допускаем возможность их произвольного выбора. В (3) учтено, что часть начального напряженного состояния может образоваться за счет произвольного упругомгновенного деформирования в момент зарождения по известному закону (1), задаваемого тензором F_0.

Отметим два частных случая движения, в которых вычисление F в (3) упрощается. а) Пусть тензоры $G(\tau,\xi)$ коммутируют при всех различных $\tau\geqslant\tau^*$. Тогда

$$Q(t,\xi)=\exp\left[\int\limits_{\tau^*}^{t}G(\tau,\xi)d\tau\right]. \tag{5}$$

б) Пусть начальное положение $X(\xi)$ есть взаимно-однозначная функция, и движение частицы можно представить в виде функции ее начального положения $x=\chi(t,X)$. Тогда

$$F(t,X)=F_1(t,X)F_1^{-1}(\tau^*(X),X)F_0(X),\quad F_1(t,X)=\nabla_X\chi(t,X). \tag{6}$$

2. *Закон наращивания. Постановка краевой задачи.* Процесс присоединения к наращиваемому телу новых элементов характеризуется вектором плотности потока добавляемого вещества $J(t,x)$ на поверхности роста $S^*(t)$. Пусть координаты $(u_1,\ u_2)$ выбраны так, что вектор $\partial X(t,u_1u_2)/\partial\tau^*$ коллинеарен с вектором единичной внешней нор-

мали n к $S^*(t)$. Рассматривая баланс массы для элементарного объема, заметаемого элементом поверхности роста $d\sum=(\partial X/\partial u_\alpha\cdot\partial X/\partial u_\beta)du_\alpha du_\beta$ за время dt, получим условие

$$(\rho_0|\partial X/\partial\tau^*|-\rho_0(\dot{x}\cdot n)+(J\cdot n))\Big|_{S^*(t)}=0. \qquad (7)$$

Здесь ρ_0—плотность зарождающихся элементов тела, $\rho_0\dot{x}$—конвективный поток вещества.

Пусть имеется исходное тело, занимающее область Ω_0, и в момент $t=0$ начинается его наращивание по части его поверхности $S^*(0)$. На других частях его поверхности $S_\sigma(t)$ и $S_\chi(t)$ заданы соответственно вектор напряжения и смещение χ. Для формулирования краевой задачи необходимо задать вектор потока $J(t, x)$, начальное значение плотности ρ_0 (после упругомгновенной деформации F_0), величины $P(t, x)$, F_0 и T_0, удовлетворяющие условию (4), и вектор плотности массовой силы $b(t, x)$. Требуется определить закон изменения области $\Omega(t)$, занимаемой телом, и деформацию $\chi(t, \xi)$, удовлетворяющую граничному условию (7) и уравнению квазистатического равновесия внутри тела $\operatorname{div}_x T+\rho b=0$, где T определяется соотношением (3), $\rho=\rho_0/\det Q$ есть плотность, удовлетворяющая уравнению неразрывности $\partial\rho(t, x)/\partial t+\operatorname{div}_x\rho\dot{x}=0$. Наряду с $\chi(t, \xi)$ нужно найти деформацию $\chi^0(t, X)$ точек исходного тела относительно какой-либо отсчетной конфигурации, удовлетворяющую уравнению равновесия, граничным условиям на $S_\sigma(t)$, $S_\chi(t)$ и условиям сопряжения с наращенной частью тела. Вместо потока J можно задать закон движения поверхности роста $S^*(t)$. Тогда после решения краевой задачи можно определить из (7) поток J, обеспечивающий заданное движение поверхности роста $S^*(t)$.

3. *Пример*. Пусть R, θ, Z—цилиндрические координаты в начальной конфигурации исходного полого цилиндра $R_1\leqslant R\leqslant R_2$. Начиная с момента $t=0$ происходит его наращивание снаружи с направленным вдоль радиуса вектором потока величиной $J(t)$. Одновременно начинают действовать внутреннее давление $p_i(t)$, внешнее давление $p_e(t)$ и осевая сила $P_z(t)$, изменяясь непрерывно при нулевых начальных значениях. Обозначим $c_1(t)$ внешний радиус цилиндра, $r(t, \tau^*)$ и $r(t, R)$—движение точек наращенной и исходной области. Пространственное поле скоростей в цилиндрических координатах r, φ, z будет

$$\dot{r}=f(t, r), \quad \dot{\varphi}=0, \quad \dot{z}=\alpha(t)z. \qquad (8)$$

Матрица физических компонент тензора $\nabla_x\dot{x}$ равна

$$\begin{Vmatrix} \partial f/\partial r & 0 & 0 \\ 0 & f/r & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{Vmatrix}. \qquad (9)$$

Условие несжимаемости $\operatorname{div}\dot{x}\equiv tr\nabla_x\dot{x}=0$ дает $\partial f/\partial r+f/r+\alpha=0$, откуда находим ($\beta(t)$—неопределенная функция):

$$f(t, r)=-\alpha(t)r/2+\beta(t)/r. \qquad (10)$$

Интегрируя (8) с учетом (10), будем иметь

$$r^2(t,R)=R^2e^{-a(t)}+\int\limits_0^t e^{-\Delta a(t,\tau)}2\beta(\tau)d\tau,\quad \Delta a(t,\tau)=a(t)-a(\tau),$$

$$r^2(t,\tau^*)=c_1^2(\tau^*)e^{-\Delta a(t,\tau^*)}+\int\limits_{\tau^*}^t e^{-\Delta a(t,\tau)}2\beta(\tau)d\tau,\quad a(t)=\int\limits_0^t \alpha(\tau)d\tau. \qquad (11)$$

Обозначим F, F_0 и F^0 градиенты полной и начальной деформации в наращенной области и в исходном цилиндре. Физические компоненты произвольного тензора A обозначим $A_{<\alpha\beta>}$. В силу несжимаемости для отличных от нуля компонент имеем $F_{<rr>}F_{<\varphi\varphi>}F_{<zz>}=1$, и аналогичные равенства для F_0 и F^0. По (3), (5), (9), (11) найдем

$$F_{<rr>}=F_{0<rr>}\exp[-\Delta a(t,\tau^*)]c_1(\tau^*)/r(t,\tau^*),\quad F^0_{<\varphi\theta>}=r(t,R)/R,$$

$$F_{<\varphi\varphi>}=F_{0<\varphi\varphi>}r(t,\tau^*)/c_1(\tau^*),\quad F^0_{<rR>}=\exp[-a(t)]R/r(t,R). \qquad (12)$$

Определяющее уравнение принимаем в виде [4]

$$T=-pI+F(t)L[I-C^{-1}I_1(C)/3]F^T(t),\ C=F^TF,\ I_1(C)=\mathrm{tr}C. \qquad (13)$$

Здесь p—гидростатическое давление, L—линейный оператор Вольтерра

$$L\varphi(t,\tau^*)=\int\limits_{\tau^*}^t \mu(t-\tau^*,\tau-\tau^*)d\varphi(\tau),\quad L\varphi(t,R)=\int\limits_0^t \mu_1(t,\tau,R)d\varphi(\tau).$$

В силу изотропии T_0 в (3) пропорционален единичному тензору и поглощается членом $-pI$. По (13) имеем ($\sigma_\alpha=T_{<\alpha\alpha>}$, $\sigma^0_\alpha=T^0_{<\alpha\alpha>}$, T^0—тензор Коши для исходного цилиндра):

$$(\sigma_\alpha-\sigma_\beta)(t,r)=\{F^2_{<\alpha\alpha>}(t,\tau^*)L[1-F^{-2}_{<\alpha\alpha>}I_1]-F^2_{<\beta\beta>}(t,\tau^*)L[1-$$

$$-F^{-2}_{<\beta\beta>}I_1]\}\Big|_{\tau^*=\tau^*(t,r)},\ (\sigma^0_\alpha-\sigma^0_\beta)(t,R)=\{(F^0_{<\alpha\alpha>})^2L[1- \qquad (14)$$

$$-(F^0_{<\alpha\alpha>})^{-2}I^0_1]-(F^0_{<\beta\beta>})^{-2}L[1-(F^0_{<\beta\beta>})^{-2}I^0_1]\}\Big|_{R=R(t,r)},$$

$$I_1=\sum_\alpha F^2_{<\alpha\alpha>},\quad I^0_1=\sum_\alpha (F^0_{<\alpha\alpha>})^2.$$

Здесь $\tau^*(t,r)$ и $R(t,r)$ есть обратные функции к $r(t,\tau^*)$ и $r(t,R)$ в (11). Интегрируя уравнение равновесия $\partial\sigma_r/\partial r=(\sigma_\varphi-\sigma_r)/r$, получим

$$\sigma^0_r(t,r)=-p_i(t)+\int\limits_{r(t,R_1)}^r \frac{(\sigma^0_\varphi-\sigma^0_r)(t,\rho)}{\rho}d\rho,\ \sigma_r(t,r)=-p_e(t)-$$

$$-\int\limits_r^{c_1(t)} \frac{(\sigma_\varphi-\sigma_r)(t,\rho)}{\rho}d\rho. \qquad (15)$$

Таким образом, напряжения и деформации выражены по (11)—(15) через три неопределенные функции времени α, β и c_1. Используя непрерывность σ_r при $r=r(t,R_2)$, из (15) будем иметь

$$\int\limits_{r(t,R_1)}^{r(t,R_2)} \frac{(\sigma^0_\varphi-\sigma^0_r)(t,\rho)}{\rho}d\rho+\int\limits_{r(t,R_2)}^{c_1(t)} \frac{(\sigma_\varphi-\sigma_r)(t,\rho)}{\rho}d\rho=p_i(t)-p_e(t). \qquad (16)$$

Выражение для осевой силы и условие наращивания (7) будут

$$P_z(t) = \int_{r(t,\,R_1)}^{r(t,\,R_2)} \sigma_z^0(t,\rho)2\pi\rho d\rho + \int_{r(t,\,R_2)}^{c_1(t)} \sigma_z(t,\rho)2\pi\rho d\rho, \tag{17}$$

$$dc_1/dt = -\alpha(t)c_1(t)/2 + \beta(t)/c_1(t) + J_0(t), \quad J_0 = J/\rho. \tag{18}$$

Соотношения (16)—(18) служат системой уравнений для нахождения α, β и c_1 при заданных p_i, p_e, P_z, J_0, F_0. Можно поставить задачу иначе, считая $c_1(t)$ заданным. Тогда необходимо решить (16)—(17) относительно α и β. Найденная при этом из (18) величина $J_0(t)$ должна быть положительной.

Автор благодарит Н. Х. Арутюняна за внимание к работе.

Институт проблем механики
Академии наук СССР

Վ. Վ. ՄԵՏԼՈՎ

Վերջավոր դեֆորմացիաների ժամանակ մարմինների աճեցման մասին

Դիտարկվում է վերջավոր դեֆորմացիաների ժամանակ աճող մարմնի լարված դեֆորմացված վիճակի որոշման խնդրի դրվածքը ընդհանուր տեսքով։

Բերվում է արտաքին և ներքին ճնշման, ինչպես նաև առանցքային ուժի ազդեցության տակ գտնվող չսեղմվող անհամասեռ առաձգամածուցիկ նյութից պատրաստված սնամեջ գլանի սեղման մասին խնդրի լուծումը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. Трусделл*, Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред, Мир, М., 1975. [2] *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц, ГИТЛ, М., 1953. [3] *Н. Х. Арутюнян, В. В. Метлов*, Изв. АН СССР. МТТ, № 4, 1983. [4] *А. А. Адамов*, канд. дис., Моск. ин-т электронного машиностроения, 1979.