ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 2

УДК 624.04+624.073

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

В. А. Арзуманян

Об изгибе круглой, шарнирно-опертой по контуру пластинки за пределом упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 12/VII 1984)

В работе рассматривается изгиб круглой, шарнирно-опертой по контуру пластинки за пределом упругости под действием равномерно распределенной нагрузки. Основное нелинейное дифференциальное уравнение, относительно функции прогиба, описывающее упруго-пластическое равновесие круглой пластинки по деформационной теории пластичности имеет вид (1)

$$\frac{d^4w}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3w}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr}=\frac{q}{D}-\frac{1}{D}\left(\frac{d^2\Delta M_r}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\Delta M_r}{dr}-\frac{1}{r}\frac{d\Delta M_\theta}{dr}\right), \tag{1}$$

где ΔM_r и ΔM_θ—нелинейные компоненты изгибающих моментов, определяемые по формулам (2)

$$\Delta M_r=\left(D-\frac{4}{3}I_3\right)\left(\varkappa_r+\frac{1}{2}\varkappa_\theta\right),$$
$$\Delta M_\theta=\left(D-\frac{4}{3}I_3\right)\left(\varkappa_\theta+\frac{1}{2}\varkappa_r\right), \tag{2}$$

здесь D—цилиндрическая жесткость пластинки; $\varkappa_r$, $\varkappa_\theta$—кривизны изогнутой поверхности пластинки; I_3—изгибная жесткость сечения пластинки

$$I_3=\int_{-h/2}^{+h/2}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}z^2dz, \tag{3}$$

где σ_i—интенсивность напряжений; ε_i—интенсивность деформаций.

В соответствии с граничными условиями шарнирно-опертой пластинки (1)

$$\varkappa_r(R)+\frac{1}{2}\varkappa_\theta(R)=0. \tag{4}$$

Это выражение может быть приведено к виду (1)

$$\frac{3}{2}\varkappa_r(0)-\frac{7}{32}\frac{qR^2}{D}-\frac{1}{2R}\frac{dY}{dr}(R)-\frac{d^2Y}{dr^2}(R)=0, \tag{5}$$

где $Y(r)$—частное решение уравнения (1), имеющее вид (1)

$$Y(r)=\frac{R^2}{4D}\left[\alpha^2\Delta M_r(0)+\int_0^{\alpha}\Delta M_r(\rho)\left(1-2\ln\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\alpha^2}{\rho^2}\right)\rho d\rho-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\alpha}\Delta M_\theta(\rho)\left(1+2\ln\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\alpha^2}{\rho^2}\right)\right]\rho d\rho; \qquad (6)$$

здесь $\alpha=\frac{r}{R}$ —безразмерная координата.

Значения нелинейных компонентов изгибающих моментов на контуре будут равны

$$\Delta M_r(R)=0;\quad \Delta M_\theta(R)=-\frac{3}{2}\left[D-\frac{4}{3}I_3(R)\right]\varkappa_r(R). \qquad (7)$$

При деформировании шарнирно-опертой пластинки возникает одна упруго-пластическая зона около центра пластинки, которая затем распространяется к опорному контуру. В первом приближении принимаем, что нелинейные компоненты изгибающих моментов изменяются по закону треугольника ([3]) (рис. 1).

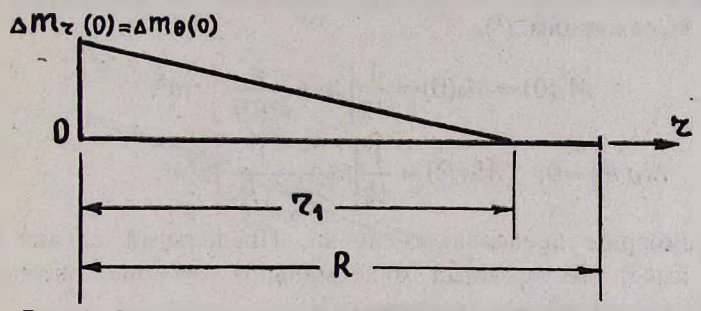

Рис. 1. Закон изменения нелинейных компонентов изгибающих моментов

Поэтому имеются два участка, на которых частное решение определяется по формулам ([1]):

$$Y(r)=\frac{R^2}{9}\frac{\Delta M_r(0)}{D}\frac{\alpha^3}{\alpha_1}\quad (r\leqslant r_1); \qquad (8)$$

$$Y(r)=\frac{R^2}{4D}\Delta M_r(0)\left(\alpha^2-\frac{5}{9}\alpha_1^2-\frac{2}{3}\alpha_1^2\ln\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)\quad (r\geqslant r_1), \qquad (9)$$

где $\alpha_1=\frac{r_1}{R}$ —безразмерная длина упруго-пластической зоны.

Для определения α_1 воспользуемся выражением ([1])

$$\alpha_1^2=\frac{6}{13K}\left[\varkappa_r(0)-\frac{19}{36}\frac{\Delta M_r(0)}{D}\right]\left\{1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{13\frac{e^2}{h^2}-\left[\varkappa_r(0)-\frac{1}{6}\frac{\Delta M_r(0)}{D}\right]^2}{\varkappa_r(0)-\frac{19}{36}\frac{\Delta M_r(0)}{D}}}\right\} \qquad (10)$$

где K—параметр нагрузки, определяемый из выражения (5);

$$K=\frac{qR^2}{16D}=\frac{2}{7}\left[\frac{3}{2}\varkappa_r(0)-\frac{1}{2R}\frac{dY}{dr_1}(R)-\frac{d^2Y}{dr^2}(R)\right]. \qquad (11)$$

Подставляя в (11) значения производных от выражения (9), получаем

$$K\frac{h}{\varepsilon_T}=\frac{3}{7}\left[e(0)-\frac{9}{2}\Delta m_r(0)\left(1+\frac{1}{9}\alpha_1^2\right)\right], \qquad (12)$$

где

$$e(0)=\frac{\varepsilon_0(0)}{\varepsilon_T};\qquad \Delta m_r(0)=\frac{\Delta M_r(0)}{Eh^2\varepsilon_T}.$$

Подставив (12) в выражение (10), получаем уравнение для определения α_1:

$$\left[e(0)-\frac{9}{2}\Delta m_r(0)\right]\alpha_1^2-\frac{1}{2}\Delta m_r(0)\alpha_1^4=\frac{14}{13}t_0, \qquad (13)$$

где

$$t_0=e(0)-\frac{9}{4}\Delta m_r(0)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{13-\left[e(0)-\frac{3}{2}\Delta m_r(0)\right]^2}. \qquad (14)$$

Значение α_1 может быть определено, если задано значение $e(0)$.

Изгибающие моменты в центре и на контуре пластинки определяются по выражениям [1]

$$M_r(0)=M_\theta(0)=\frac{1}{12}\left[3-\frac{e}{e^2(0)}\right]\sigma_T h^2;$$

$$M_r(R)=0;\quad M_\theta(R)=\frac{1}{12}\left[3-\frac{1}{e^2(R)}\right]\sigma_T h^2. \qquad (15)$$

а) Рассмотрим предельный случай. Предельный случай расчета пластинки имеет место, когда максимальное значение интенсивности деформаций удовлетворяет уравнению [1]

$$e^3(0)-\frac{4}{3}\left(\sqrt{13}-\frac{3}{8}\right)e^2(0)-\frac{1}{6}=0, \qquad (16)$$

откуда $e(0)=4{,}316$. При этом константы

$$\Delta m_r(0)=\Delta m_\theta(0)=\frac{1}{6}\left[e(0)+\frac{1}{2e^2(0)}-\frac{3}{2}\right]=0{,}474. \qquad (17)$$

Радикал в выражении (14) обращается в нуль и уравнение (13) принимает вид

$$\alpha_1^4-9{,}211\alpha_1^2+9{,}380=0. \qquad (18)$$

Решая это уравнение, получаем $\alpha_1=1{,}080$, т. е. в предельном случае $\alpha_1>1$. При этом на основании (12) значение нового параметра нагрузки будет

$$P=\frac{qR^2}{Eh^2\varepsilon_T}=\frac{16}{9}K\frac{h}{\varepsilon_T}=1{,}453. \qquad (19)$$

Значение максимальной интенсивности деформаций будет

$$e(1{,}08)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\varkappa_r^2(1{,}08)+\varkappa_r(1{,}08)\varkappa_\theta(1{,}08)+\varkappa_\theta^2(1{,}08)}=0{,}9998,$$

т. е., как и должно быть, оно близко к единице.

Эти результаты относятся к расчету пластинки в первом приближении, когда в центре пластинки функции $\Delta m_r(0)$ и $\Delta m_\theta(0)$ равны друг другу и меняются по закону треугольника (рис. 1).

Проведя расчеты во втором приближении, получаем значения $\Delta m_r(r)$ и $\Delta m_\theta(r)$ вдоль линии α, графики которых приведены на рис. 2. Как показали расчеты, изменения этих функций (пунктирная линия) незначительны и поэтому можно ограничиться результатами первого приближения.

б) Рассмотрим промежуточное состояние пластинки. Задаваясь

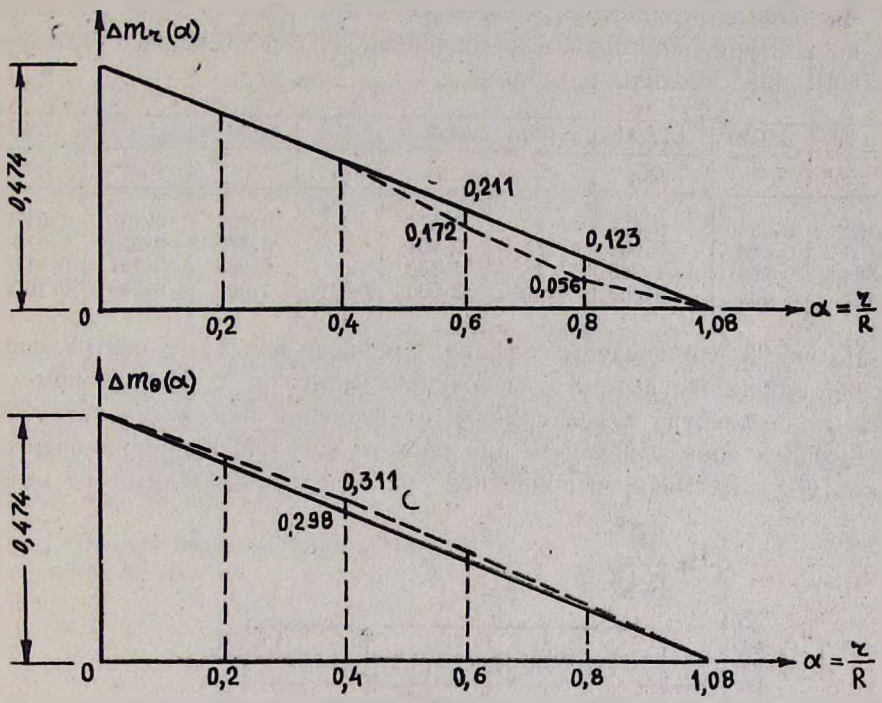

Рис. 2. Графики изменения нелинейных компонентов изгибающих моментов во втором приближении

значением относительной интенсивности деформаций $e(0)=\frac{\varepsilon_0(0)}{\varepsilon_T}$ в центре пластинки, из уравнения (13) можно определить длину упруго-пластической зоны:

$$\alpha_1^2=\frac{e(0)-\frac{9}{2}\Delta m_r(0)}{\Delta m_r(0)}\left\{1-\sqrt{1-\frac{28}{13}\frac{t_0\Delta m_r(0)}{\left[e(0)-\frac{9}{2}\Delta m_r(0)\right]^2}}\right\}. \qquad (20)$$

Полагая в (20) длину упруго-пластической зоны $\alpha_1=1{,}0$, получаем простое выражение для определения $e(0)$:

$$e(0)-\frac{3}{2}\Delta m_r(0)=\frac{7}{2}, \qquad (21)$$

где $\Delta m_r(0)$ определяется по выражению (17).

Решая уравнение (21), получаем

$$e(0)=4{,}176;\quad \Delta m_r(0)=0{,}451. \tag{22}$$

Пользуясь формулой (12), находим значение параметра нагрузки

$$P=\frac{16}{9}K\frac{h}{\varepsilon_T}=1{,}464. \tag{23}$$

Значение (23) оказывается больше, чем значение (19). Это противоречие указывает на то, что при рассмотрении предельного случая мы ограничились только решением задачи в первом приближении; при уточнении решения значение (19) повысится и будет, хотя и незначительно, но превышать значение (23).

Численные результаты, полученные при расчете шарнирно-опертой по контуру пластинки, изготовленной из строительной стали, при $\varepsilon_T=0{,}001$ представлены в таблице.

$P=\frac{qR^2}{\sigma_T h^2}$	$\frac{w(0)h}{R^2\varepsilon_T}$	$\frac{\varphi(R)h}{R\varepsilon_T}$	$\varkappa_r(0)h$	$\varkappa_\theta(R)h$	$\varepsilon_0(0)$	$\varepsilon_0(R)$	$M_r(0)$	$M_\theta(0)$
			ε_T	ε_T	ε_T	ε_T	$\sigma_T h^2$	$\sigma_T h^2$
0,762	0,393	—0,571	1	0,571	1	0,286	0,167	0,0476
1,150	0,690	—0,968	2	0,954	2	0,477	0,229	0,0794
1,334	0,994	—1,335	3	1,335	3	0,668	0,241	0,1113
1,464	1,431	—2,000	4,176	2,000	4,176	1,000	0,245	0,1670

На рис. 3, 4 приведены графики изменения прогиба в центральном сечении пластинки, а также изгибающих моментов в центральном сечении и на контуре в зависимости от значения параметра нагрузки.

Графики показывают, что при расчете круглой, шарнирно-опертой по контуру пластинки, выполненной из идеально-пластического мате-

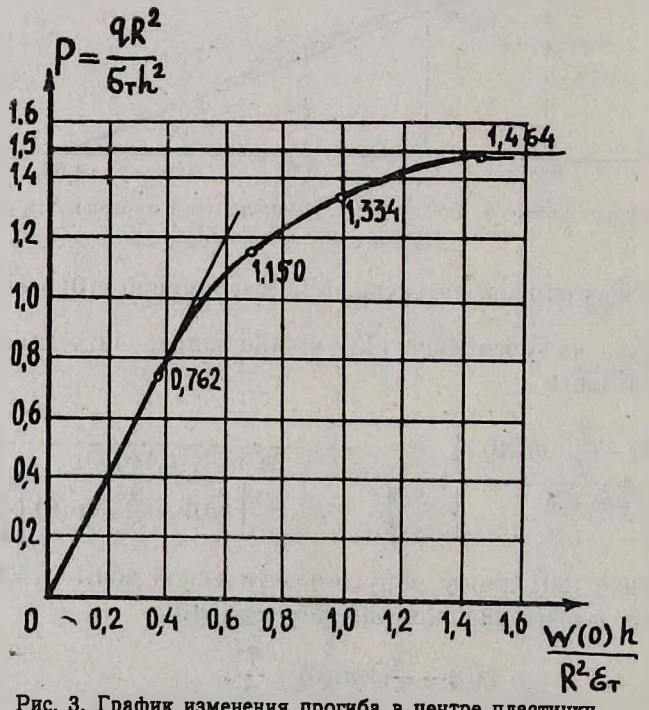

Рис. 3. График изменения прогиба в центре пластинки

риала, прогибы остаются конечными до уровня нагрузки $P=1{,}464$, который очень близок к предельному уровню (4) $P_{пр.}=1{,}5$.

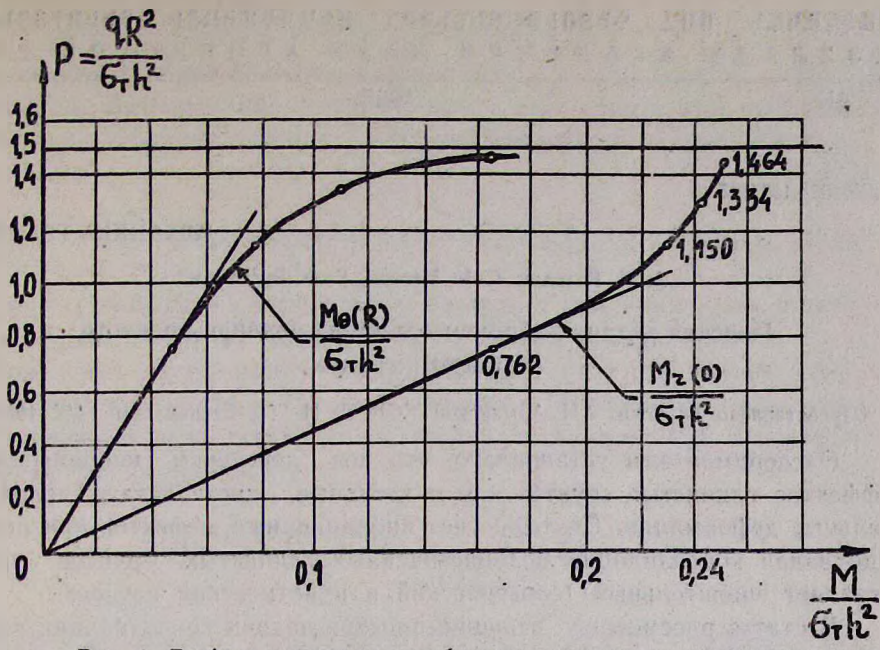

Рис. 4. Графики изменения изгибающих моментов в центральном сечении и на контуре пластинки

При дальнейшем увеличении нагрузки прогибы в центре пластинки неограниченно возрастают; изгибающие моменты в центральном сечении стремятся к предельному значению, равному $M_{пр.}(0)=0{,}25\ \sigma_T h^2$. При этом значение момента на контуре $M_\theta(R)$ остается меньше указанной предельной величины.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ

Եզրագծով հոդակապային ճեճված կլոր սալի ծռումը առաձգականության սահմանից դուրս

Դիտարկվում է առաձգականության սահմանից դուրս եզրագծով հոդակապային հենված կլոր սալի առաձգական-պլաստիկ հավասարակշռությունը։

Կիրառված է հաջորդական մոտավորությունների մեթոդը, որի առաջին մոտավորությունում ծռող մոմենտների ոչ գծային կոմպոնենտները փոխվում են եռանկյան օրենքով։

Կատարված է թվային հաշվարկ և ստացված են ճկվածքների, պտտման անկյունների, կորությունների և ծռող մոմենտների արժեքները։ Կառուցված են այդ մեծությունների գրաֆիկները կախված բեռի պարամետրի արժեքից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Арзуманян,* Межвузовский тематический сборник научных трудов. Исследования по сейсмостойкости сооружений. ЕрПИ, Ереван, 1984. [2] *И. С. Цурков,* Сб. трудов МИСИ, № 47, 1965. [3] *С. И. Цурков,* Деп. в ВНИИС Госстроя СССР, Строительство и архитектура, вып. 8, № 49, (1981). [4] *А. А. Ильюшин,* Пластичность, Гостехиздат, М., 1948.