ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXX 1985 2

УДК 517.52

МАТЕМАТИКА

Р. М. Меграбян

О множестве предельных точек частных сумм векторных рядов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 23/V 1984)

Пусть

$$\sum x_i, \ x_i \in E_n \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{1}$$

ряд, элементы которого — векторы n-мерного евклидова пространства. Через $M(\sum x_i)$ обозначается множество всех элементов $y \in E_n$, для которых существует сходящаяся к ним перестановка ряда (1):

$$\sum x_{\sigma(i)} = \sigma \sum x_i = y.$$

Следующий, ставший уже классическим, результат был получен Штейницем ([1]):

Теорема А. *Пусть ряд* (1) *сходится в* E_n *и для любого линейного функционала* $x^* \in (E_n)^* = E_n$ *ряд* $\sum \langle x^*, x_i \rangle$ *не сходится абсолютно. Тогда* $M(\sum x_i) = E_n$.

Основным моментом при доказательстве теоремы А является:

Лемма А (см. ([1])). *Для любого натурального числа* n *существует число* B_n *такое, что для любой конечной системы* $x_1, \ldots, x_N$ *элементов из* E_n *существует перестановка* τ *набора чисел* $\{1, \ldots, N\}$ *такая, что*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} \left\| \sum_{i=1}^{k} x_{\tau(i)} \right\| \leqslant B_n \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant N} \|x_i\| + \left\| \sum_{i=1}^{N} x_i \right\| \right).$$

Если помимо ряда (1) фиксирована и перестановка натурального ряда σ, то через $M'(\sigma, \sum x_i)$ обозначим множество предельных точек последовательности частных сумм ряда

$$\sum x_{\sigma(i)}. \tag{2}$$

В этой работе изучается структура множества $M'(\sigma, \sum x_i)$. Очевидно, что $M'(\sigma, \sum x_i)$ всегда замкнуто, а из приведенной леммы Штейница непосредственно вытекает включение $M'(\sigma, \sum x_i) \subset (M(\sum x_i)$ (для любой перестановки σ).

Для формулировки результата работы нам потребуются:

Определение 1. *Замкнутое множество* $E \subset F_n$ *называется связным, если для любых* $A, B \in E$, $\forall \varepsilon > 0$ *существует набор* $\{A_i\}_{i=1}^m$ *из* E *такой, что* $\|A_k - A_{k-1}\| < \varepsilon$, $1 < k \leqslant m$ *и* $A_1 = A$, $A_m = B$.

Определение 2 (см. ([2])). *Замкнутое множество* $E \subset E_n$ *назовем обобщенно-связным, если для любых точек* A, B *из* E, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall R > 0$ *существует набор точек* $\{A_i\}_{i=1}^m$ *из* E *такой, что* $\|A_k - A_{k-1}\| < \varepsilon$, $1 < k \leqslant m$, $A_1 = A$ *и* $A_m = B$ *или* $\|A_m\| \geqslant R$.

Теорема 1. *Пусть дан сходящийся ряд вида* (1) *и* $m = \dim M(\sum x_i)$. *Тогда, если*

а) $m \leqslant 1$ *и* $E \subset M(\sum x_i)$ *— произвольное замкнутое связное множество*

или

б) $m > 1$ *и* $E \subset M(\sum x_i)$ *— произвольное замкнутое обобщенно-связное множество,*

то существует перестановка σ *такая, что* $M'(\sigma, \sum x_i) = E$.

Частный случай этой теоремы, когда $x_i \in E_n$, $M(\sum x_i) = E_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) и E — выпуклое замкнутое подмножество, был установлен ранее Хадвигером ([3]). И. П. Лапчик ([2]) показала, что в теореме Хадвигера при $n = 2$ условие выпуклости множества E можно заменить более слабым условием обобщенной связности. При этом И. П. Лапчик показала, что для произвольного ряда (1) условие обобщенной связности множества $E \subset E_n$ является необходимым для того, чтобы нашлась перестановка σ с $M'(\sigma, \sum x_i) = E$.

Отправляясь от работы И. П. Лапчик ([2]), И. П. Миловидова ([5]) получила утверждение теоремы 1 в случае, когда $n = 2$ и $\dim M(\sum x_i) = 1$ (в этом случае условие связности множества E является также необходимым, см. ([2,5])).

Отметим еще, что доказательство теоремы 1 основано на иных соображениях и заметно проще, чем соответствующие доказательства работ ([2,5]).

Ниже нам потребуется следующее обозначение: если $\Lambda = \{i_j\}_{j=1}^{\nu}$ набор различных натуральных чисел и σ — перестановка набора чисел $\{1, \ldots, \nu\}$, то

$$m(\Lambda, \sigma, \sum x_i) = \max_{1 \leqslant k \leqslant \nu} \left\| \sum_{j=1}^{k} x_{i_{\sigma(j)}} \right\|.$$

Лемма 1. *Любой сходящийся ряд вида* (1) *можно представить в виде*

$$\sum x_i = \sum t_i + \sum y_i \equiv \sum (t_i + y_i),$$

где ряд $\sum y_i$ *сходится абсолютно, а* $t_k \in M(\sum t_i)$, $k = 1, 2, \ldots$

Лемма 2. *Для любого сходящегося ряда* $\sum x_i$, ($x_i \in E_n$, $i = 1, 2, \ldots$) *и для любого ряда* $\sum W_i$ *такого, что* $W_k \in M(\sum t_i)$, $k = 1, 2, \ldots$; $\|W_i\| \underset{i}{\to} 0$, *существуют конечные непересекающиеся подмножества* $\Omega_i \subset N$ *и перестановки* τ_i *набора чисел* $\{1, \ldots, |\Omega_i|\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *такие, что*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = N; \quad m(\Omega_k, \tau_k, \sum t_i) \to 0 \quad (k \to \infty);$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j \in \Omega_i} t_j - \sum_{i=1}^{k} W_i \right\| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Доказательство леммы 1 опирается на приведенную выше теорему А и лемму А, а доказательство леммы 2 легко можно получить из леммы 1 и леммы А.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 2 следует, что если ряд $\sum t_i$ переставим так:

$$\tau_1 \sum_{\Omega_1} t_i + \tau_2 \sum_{\Omega_2} t_i + \dots$$

и эту перестановку обозначим через τ, то будем иметь $M'(\tau, \sum t_i) = M'(\sum W_i)$. Следовательно, из леммы 1 вытекает, что

$$M'(\tau, \sum x_i) = M'(\sum W_i) + x, \text{ где } x = \sum y_i = \sum (x_i - t_i). \tag{3}$$

Обозначим $E' = E - x$. Из леммы 1 ясно, что $E' \subset M(\sum t_i)$. Из (3) вытекает, что для доказательства теоремы достаточно показать, что существует ряд $\sum W_i$ такой, что

$$W_i \in M(\sum t_i), \ i = 1, 2, \dots; \ \|W_i\| \underset{i}{\to} 0; \ M'(\sum W_i) = E'. \tag{4}$$

Из условия теоремы вытекает, что E'—замкнуто и связно при $\dim M(\sum t_i) \leqslant 1$ и обобщенно-связно при $\dim M(\sum t_i) < 1$. Отсюда (и из того, что $M(\sum t_i)$ является подпространством E_n) вытекает, что существует последовательность z_i, $i = 1, 2, \dots$ такая, что

$$\begin{cases} \|z_{k+1} - z_k\| \to 0 \quad (k \to \infty) \\ z_k \in E', \ k \in 1, 2, \dots \quad \text{при} \quad \dim M(\sum t_i) \leqslant 1 \\ \forall R > 0 \ \exists N = N(R); \ z_k \in E' \cup \{x \in M(\sum t_i): \\ \|x\| \geqslant R\}, \ k \geqslant N \quad \text{при} \quad \dim M(\sum t_i) > 1 \\ \forall x \in E' \ \exists n_k \uparrow \infty; \ \lim\limits_{k \to \infty} z_{n_k} = x. \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим $W_1 = z_1$ и $W_i = z_i - z_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots$. Из (5) вытекает, что для ряда $\sum W_i$ верно

$$W_k \in M(\sum t_i), \quad k = 1, 2, \dots; \quad \|W_k\| \to 0 \quad (k \to \infty);$$

$$\sum_{i=1}^{j} W_i \in E', \quad j = 1, 2, \dots \quad \text{при} \quad \dim M(\sum t_i) \leqslant 1$$

$$\forall R > 0 \ \exists N = N(R); \quad \sum_{i=1}^{j} W_i \in E' \cup \{x \in M(\sum t_i):$$

$$\|x\| \geqslant R\}, \quad j \geqslant N \quad \text{при} \quad \dim M(\sum t_i) > 1$$

$$\forall x \in E' \ \exists n_k \uparrow \infty; \quad \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} W_i = x.$$

Отсюда и из замкнутости E' вытекает (4). Теорема 1 доказана.

Сформулируем еще одно утверждение, обобщающее результаты работ ([6–10]).

Теорема 2. *Пусть дан ряд* $\sum f_i(x)$, *сходящийся в метрическом пространстве* $L^p(0, 1)$ ($f_i \in L^p(0, 1)$, $p > 0$). *Тогда, если*

$$(\sum_i f_i^2(x))^{1/2} \in L^p(0, 1),$$

то множество сумм этого ряда

$$M(\sum f_i) \equiv \{ f \in L^p(0, 1): \ \exists \sigma, \ \textit{что} \ \ \sum f_{\sigma(i)} \overset{L^p}{=} f \}$$

является смещенным подпространством в $L^p(0, 1)$. *Более того, если* $p \geqslant 1$, *то* *а)* $M(\sum f_i)=h+\Gamma_0$

где $h=\sum f_i$, *а* Γ_0 — *аннулятор множества линейных функционалов* $\Gamma(\sum f_i)\equiv\{g\in(L^p)^*:\sum|g(f_i)|<\infty\}$, *а также*

б) $M(\sum f_i)=\{f\in L^p(0,1)$: *для* $\forall g\in(L^p)^*$ $\exists\sigma$, *что*

$$\sum g(f_{\sigma(i)})=g(f)\}.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность Б. С. Кашину и Р. И. Овсепяну, под руководством которых была сделана эта работа.

Математический институт
им. В. А. Стеклова

Ռ. Մ. ՄԵՀՐԱԲՅԱՆ

Վեկտորական շարքերի մասնական գումարների սահմանային կետերի բազմության մասին

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ R^n*-ում պայմանական զուգամետ շարքի գումարների բազմության կամայական կապակցված (ընդհանրացված կապակցված)* E *ենթաբազմության համար գոյություն ունի շարքի այնպիսի տեղափոխություն. որի դեպքում շարքի մասնական գումարների սահմանային կետերի բազմությունը համընկնում է* E*-ի հետ։*

Աշխատանքի երկրորդ պնդումն է՝ եթե $L^p(0,1)$*-ում զուգամետ շարքի Պելիի ֆունկցիան պատկանում է* $L^p(0,1)$*-ին, ապա այդ շարքի գումարների* M *բազմությունը* $L^p(0,1)$*-ի տեղաշարժված ենթատարածություն է։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *E. Steinitz*, J. reine und angew. Math., v. 143, 128—175 (1913); v. 144, 1—40 (1914). [2] *И. П. Лапчик*, ИАН СССР. Сер. мат., т. 22, № 5 (1958). [3] *H. Hadwiger*, Math. z., 42, heft 4 (1942). [4] *И. П. Миловидова*, Изв. вузов, № 9 (76), 1968. [5] *И. П. Миловидова*, Изв. вузов, № 10 (113), 1971. [6] *Е. М. Никишин*, Мат. заметки, т. 14, № 1 (1973). [7] *С. А. Чобанян*, Теория вероятностей и ее применения, т. 28, вып. 2 (1983). [8] *Drobot*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 142, № 407 (1969). [9] *В. П. Фонф*, Мат. заметки, т. 11, вып. 2 (1972). [10] *Д. В. Печерский*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 41, № 1 (1977).