ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 2

УДК 517.987.5+517.986.33

МАТЕМАТИКА

В. А. Арзуманян

Алгебраический тип эргодического сдвига Маркова

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30/XI 1983)

0°. Проблема классификации эндоморфизмов пространства Лебега является одной из важных задач эргодической теории. Она естественно приводит к поискам новых (по сравнению с автоморфизмами) инвариантов (см. например ([1-4])), значительная часть которых основана на детальном изучении убывающей последовательности разбиений на прообразы (тривиальной в случае автоморфизма).

В работах ([5,6]) была построена теория алгебр фон Неймана, ассоциированных с эндоморфизмами пространства Лебега. При этом эргодическому эндоморфизму отвечает гиперконечный фактор, а изоморфизм получающихся алгебр эквивалентен траекторному изоморфизму исходных преобразований. Поэтому инварианты фактора, ассоциированного с эндоморфизмом (в частности, его тип) автоматически являются его траекторными инвариантами.

В настоящей заметке изучен тип одностороннего эргодического сдвига Маркова с конечным числом состояний. Тип как траекторный инвариант является грубым инвариантом относительно метрического изоморфизма, однако, как показывают следующие примеры, он независим от энтропии. Пусть T_1, T_2—два эндоморфизма Бернулли с 13 состояниями $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}(\times 12)\right)$ и $\left(\frac{1}{8}(\times 5), \frac{1}{16}(\times 4), \frac{1}{32}(\times 4)\right)$ соответственно. Тогда энтропии T_1 и T_2 совпадают, при этом T_1 имеет тип $\mathrm{III}_{\frac{1}{4}}$, а тип T_2 есть $\mathrm{III}_{\frac{1}{2}}$. Заметим, что тип произвольного двустороннего сдвига (как и вообще любого автоморфизма) есть II_1.

Другой пример построен на результатах настоящей работы. Пусть $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, T_3—эндоморфизм Бернулли с состояниями (λ, λ^2), T_4, T_5—эндоморфизмы Маркова с матрицами перехода $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$ соответственно. Тогда энтропии всех трех преобразований одинаковы, тип T_3 совпадает с типом T_4 и равен III_λ, а тип T_5 есть III_{λ^2}. Таким образом эндоморфизмы T_4 и T_5 неизоморфны. Заметим, что убывающие последовательности разбиений (или σ-алгебр), определяемые ими, финитно изоморфны (ср. ([2,4])).

Тип эндоморфизма Бернулли с конечным или счетным числом состояний полностью исследован (см. ([6])). Он вычисляется по исходному распределению и равен III_λ для некоторого $\lambda\in]0, 1]$, при этом каждый такой тип можно получить при подходящем выборе образующей. Основной результат данной заметки (теорема п. 2°) заключается в том, что тип эндоморфизма Маркова, вычисляемый по переходной матрице, исчерпывается тем же множеством возможных значений.

В связи с этим правдоподобной выглядит гипотеза: *тип любого эргодического эндоморфизма (с инвариантной мерой) есть* III_λ, $\lambda\in]0, 1]$.

1°. Пусть T—эндоморфизм пространства Лебега $(X, \sum, \mu)$, т. е. сохраняющее меру преобразование X, и пусть почти каждая точка X имеет не более счетного числа прообразов. Пусть $\tau(T)$ его траекторное разбиение (точки x, y принадлежат одному и тому же элементу разбиения, если существуют целые $n, m\geqslant 0$, для которых $T^nx=T^my$), $R(T)$—график соответствующего отношения эквивалентности. Ясно, что $R(T)$—измеримое подмножество $X\times X$, содержащее в каждом слое не более счетного числа точек.

Понятие типа эндоморфизма удобно формулировать непосредственно в терминах траекторной теории. Далее кратко излагается теория счетных измеримых отношений эквивалентности, развитая в ([7]). Пусть π_l (π_r)—левая (правая) проекции $R(T)$ на X. На $R(T)$ можно ввести две эквивалентные σ-конечные меры μ_l (μ_r), определяемые следующим образом: фактор-мера μ_l (μ_r) по разбиению $\{\pi_l^{-1}(x), x\in X\}$ (соответственно $\{\pi_r^{-1}(y), y\in X\}$) совпадает с μ, а в слоях каждая из этих мер считающая. Пусть $D=\dfrac{d\mu_l}{d\mu_r}$—производная Радона-Никодима, так называемая модулярная функция эндоморфизма T, представляющая собой измеримый 1-коцикл $(D(x, y)D(y, z)=D(x, z))$. Легко проверить (см. ([6])), что $\mathrm{mod}\,\mu_l$, $D(x, y)=\mu_n(x)\,\mu_m(y)^{-1}$, если $T^nx=$ $=T^my$, где $\mu_k(z)$—условная мера z в элементе разбиения $T^{-k}\varepsilon$ (ε—разбиение на точки $\mathrm{mod}\,\mu$). Обозначим через $\sigma(f)$ множество существенных значений измеримой функции f. Пусть

$$S(T)=\bigcap\sigma(D|_{F\times F}), \qquad (1)$$

где пересечение берется по всем $F\in\sum$, $\mu(F)>0$, $D|_{F\times F}$—сужение модулярной функции на множество $F\times F\cap R(T)$.

Имеется каноническая конструкция, сопоставляющая некоторую алгебру фон Неймана каждому эндоморфизму со счетными прообразами ([5, 6]) или измеримому графику отношения эквивалентности со счетными слоями ([7]). При этом эргодическому эндоморфизму отвечает гиперфинитный фактор, а $S(T)$ совпадает с известным инвариантом Конна ([8]) этого фактора. В случае, если T существенно необратимое преобразование, $S(T)\diagdown\{0\}$ является замкнутой подгруппой $\mathbf{R}^+$ и поэтому совпадает с одной из следующих групп:

$$0)\ \{1\};\quad \lambda)\ \{\lambda^n, n\in \mathbf{Z}\},\ \lambda\in]0, 1[;\quad 1)\ \mathbf{R}^+. \qquad (2)$$

Очевидно, что если эндоморфизмы T_1 и T_2 траекторно изоморфны, то $S(T_1)=S(T_2)$. *Назовем* $S(T)$ *инвариантом Конна эргодичес-*

кого эндоморфизма T, при этом будем говорить, что он имеет тип III_λ, $\lambda\in[0,1]$, в зависимости от того, какой из вышеприведенных случаев реализуется.

Если T—эндоморфизм Бернулли, то $S(T)=\sigma(D)$ (см. ([8])). В случае сдвига Маркова это заведомо не так. Например, если $T=T_5$ (см. п. 0°), то $\sigma(D)=\{\lambda^n, n\in Z\}$, однако тип T_5 есть III_{λ^3}.

2°. Пусть $X_0=\{1, 2, \ldots, n\}$, $n>1$, $X=\prod\limits_{k\geq 1} X_k$—тихоновское произведение ($X_k=X_0$, $k=1, 2, \ldots$), представляющее собой вполне несвязный компакт. Элементы X суть последовательности $x=(x_1, x_2, \ldots)$, где $x_k\in X_0$, $k=1, 2, \ldots$, а преобразование T сдвига, $(Tx)_k=x_{k+1}$, $k=1, 2, \ldots$, является непрерывным отображением X на себя.

Пусть
$$
\begin{gathered}
R_0=\{(x, y);\ \exists n\geq 0,\ T^n x=T^n y\},\\
R_n=\{(x, y);\ (T^n x, y)\in R_0\},\ n=1, 2, \ldots \qquad (3)\\
R_n=\{(x, y);\ (x, T^{|n|}y)\in R_0\},\quad n=-1, -2, \ldots
\end{gathered}
$$

Тогда $R=R(T)=\bigcup\limits_n R_n$, причем каждое R_n состоит из однослойных множеств, что позволяет ввести на них структуру локально компактного топологического пространства. Поэтому $\tilde{R}=\coprod\limits_n R_n$ (дизъюнктное объединение) также является локальным компактом, причем однозначно определена проекция π: $\tilde{R}\to R$. Заметим, что на $\tilde{R}$ существует структура r-дискретного группоида ([9]).

Марковская мера μ на X задается первоначальным распределением $p=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ на X_0 и стохастической матрицей перехода $a=[a_{ij}]_{i,j=1}^n$. Для простоты мы предполагаем всюду, что компоненты матрицы a и вектора p положительны — это гарантирует эргодичность эндоморфизма T пространства Лебега X.

Лемма 1. *Модулярная функция D продолжается до непрерывного 1-коцикла $\tilde{D}$ на $\tilde{R}$, в том смысле, что для почти всех $z\in R$, $D(z)=\tilde{D}(\pi^{-1}(z))$.*

Пусть $\sum$—полуалгебра цилиндрических множеств вида

$$F=F(a_1, a_2, \ldots, a_k)=\{x\in X;\ x_i=a_i,\ i=1, 2, \ldots, k\}$$

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$S(T)=\bigcap \sigma(D|_{F\times F}),$$

где пересечение берется по всем $F\in\sum$.

Пусть S_n—симметрическая группа степени n, $C(S_n)$—подмножество циклов. Для каждого $s=(k_1, k_2, \ldots, k_m)\in C(S_n)$ положим $a_s=a_{k_1k_2}a_{k_2k_3}\ldots a_{k_mk_1}$ и пусть $L(a)=\{a_s, s\in C(S_n)\}$.

Теорема. *Пусть (X, μ, T)—односторонний сдвиг Маркова с конечным числом состояний и матрицей перехода a с положительными компонентами. Тогда, если существует $\lambda\in]0, 1[$ такое, что для каждого $a_s\in L(a)$, $a_s=\lambda^{k_s}$, где k_s взаимно просты, $k_s\in\mathbb{N}$, то тип T есть III_λ. В противном случае тип T есть III_1.*

Заметим, что диагональ $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ матрицы a содержится в $L(a)$, следовательно эта теорема обобщает соответствующий результат для эндоморфизма Бернулли. Предположение о конечности в теореме является несущественным — выводы теоремы верны и для случая счетной образующей.

Выражаю искреннюю благодарность А. М. Вершику, прочитавшему работу в рукописи и сделавшему несколько полезных замечаний.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ

Մարկովի էրգոդիկ տեղաշարժի հանրահաշվական տիպը

Դիցուք T-ն (X, μ) Լեբեգի տարածության ([1]) *էրգոդիկ էնդոմորֆիզմ է։ Այս ձևափոխությանը կարելի է զուգորդել մի ֆակտոր (տրիվիալ կենտրոնով ֆոն Նոյմանի հանրահաշիվ), տես* ([5]), ([6])։ *Համապատասխան ֆակտորի տիպը կանվանենք T-ի հանրահաշվական տիպ։ Այն կարելի է սահմանել նաև հետևյալ ձևով* ([7])։ *Դիցուք $R(T)=\{(x, y), \exists n, m\geqslant 0, T^n x=T^m y\}$, μ_l-ը չափ է $R(T)$-ի վրա, որը համապատասխանում է*

$$\int_{R(T)} f(x, y)\,d\mu_l(x, y)=\int_{X} \sum_{y\sim x} f(x, y)\,d\mu(x)$$

ինտեգրալին, $D(x, y)=\mu_n(x)\mu_m(y)^{-1}$, $\operatorname{mod}\mu_l$ որտեղ $\mu_k(z)$-ը z կետի պայմանական չափն է T^k ձևափոխության նախապատկերների տրոհման տարրում։ Եթե $\sigma(D)$-ն D ֆունկցիայի էական արժեքների բազմությունն է, ապա Կոննի $S(T)$ ինվարիանտը ([8]), *որոշվում է (1) բանաձևով և հանդիսանում է (2) խմբերից որևէ մեկը։ Ասենք, որ T-ն ունի III_λ տիպ, եթե $S(T)$-ի արժեքը համընկնում է λ-րդ խմբի հետ, $\lambda\in[0, 1]$։*

Ներկա աշխատանքը նվիրված է Մարկովի էնդոմորֆիզմի տիպը որոշելուն։ Թող $a=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ մատրիցի համար $L(a)$-ն նշանակում է $\alpha=a_{k_1k_2}a_{k_2k_3}\ldots a_{k_mk_1}$ տեսքի արտադրյալների բազմությունը։

Թեորեմ. Դիցուք (X, μ, T)-ն միակողմանի Մարկովի տեղաշարժ է դրական կոմպոնենտներով անցման մատրիցով։ Եթե գոյություն ունի $\lambda\in]0, 1[$ այնպիսին, որ կամայական $\alpha\in L(a)$ $\alpha=\lambda^{k_\alpha}$, որտեղ բոլոր k_α-ները փոխադարձաբար պարզ են, $k_\alpha\in N$, ապա T-ն ունի III_λ տիպ։ Հակառակ դեպքում T-ն III_1 տիպի է։

Այս արդյունքը ընդհանրացնում է համապատասխան փաստը Բեռնուլիի էնդոմորֆիզմի համար ([8])։

Ապացույցը հիմնված է այն փաստի վրա, որ (1)-ում բավական է ենթադրել F-ը գլանային բազմություն, իսկ դա իր հերթին, հետևում է $R(T)$-ի *ներկայացումից որպես R լոկալ կոմպակտ խմբակերպի (R_π-ի դիզյունկտ միավորում, տես (3)) պրոեկցիա։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Рохлин*, УМН, т. 22, № 5 (1967). [2] *А. М. Вершик*, ДАН СССР, т. 195, № 4 (1970) [3] *W. Parry, P. Walters*, Bull. of A.M.S., v. 78, № 2 (1972). [4] *I. Kubo, H. Murata, H. Totoki*, Publ. R.I.M.S., v. 9, № 2 (1974). [5] *В. А. Арзуманян, А. М. Вершик*, ДАН СССР, т. 238, № 3 (1978). [6] *В. А. Арзуманян*, ДАН АрмССР, т. 68, № 5 (1979). [7] *J. Feldman, C. C. Moore*, Trans. of A.M.S., v. 234, № 2 (1977). [8] *A. Connes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., v. 6, № 2 (1973). [9] *J. N. Renault*, Lect. Notes in Math., v. 793 (1980).