ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 2

УДК 517.518.3

МАТЕМАТИКА

Г. М. Мушегян, Р. С. Давтян

О коэффициентах переставленного ряда Хаара, подпоследовательность частичных сумм которого сходится к функции $f(x)$, $f(x)\in L_p$ $(1\leqslant p<2)$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 11/X 1983)

В работе ([1]) было показано, что существует ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x), \tag{1}$$

который всюду на $[0, 1]$, кроме одной точки, сходится к нулю, но не все коэффициенты $a_n (n=1, 2, \ldots)$ равны нулю. В работе ([2]) был выделен класс рядов Хаара, для которого одноточечное множество является множеством единственности. Этот класс определяется следующим условием: А) для произвольной точки $x_0\in[0, 1]$ справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n_k}}{|\chi_{n_k}(x_0)|}=0, \qquad \text{где } \{n_k\}_{k=1}^{\infty}=\{n: \chi_n(x_0)\neq 0\}.$$

В этой же работе была доказана

Теорема 1. *Если коэффициенты ряда* (1) *удовлетворяют условию* А) *и некоторая подпоследовательность* $\{S_{m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ *его частных сумм всюду на* $[0, 1]$, *кроме, быть может, счетного множества точек, сходится к суммируемой функции* $f(x)$, *то* (1) *является рядом Фурье—Лебега функции* $f(x)$.

Задаче восстановления коэффициентов всюду сходящихся рядов Хаара была посвящена также работа ([3]).

В дальнейшем нам понадобится следующее определение. Пусть дан ряд (1), а $\sigma=\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ есть некоторая перестановка последовательности натуральных чисел $(1, 2, \ldots, n, \ldots)$. Обозначим

$$(\sigma)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}\chi_{n_k}(x) \tag{2}$$

и назовем переставленным рядом Хаара. Частные суммы этого ряда будем обозначать следующим образом:

$$S_m(\sigma, x)=\sum_{l=1}^{m} a_{n_l}\chi_{n_l}(x) \quad (m=1, 2, \ldots).$$

В работе (4) была установлена

Теорема 2. *Если коэффициенты ряда* (2) *удовлетворяют условию* A) *и некоторая подпоследовательность* $\{S_{m_i}(\sigma, x)\}_{i=1}^{\infty}$ *его частных сумм всюду на* [0, 1], *кроме, быть может, счетного множества точек, сходится к ограниченной функции* $f(x)$, *то* (2) *является рядом Фурье—Лебега функции* $f(x)$.

В этой же работе был приведен пример суммируемой $f(x)$ и ряда (2), удовлетворяющего условию A), таких, что некоторая подпоследовательность частных сумм $\{S_{m_i}(\sigma, x)\}_{i=1}^{\infty}$ всюду на [0, 1] сходится к $f(x)$, но этот ряд не является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$. В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 3. *Для произвольного числа* p, $1 \leqslant p < 2$, *существует ряд* (2), *который удовлетворяет условию* A) *и некоторая подпоследовательность частичных сумм которого всюду на* [0, 1] *сходится к конечной функции* $f(x)$, $f(x) \in L_p[0, 1]$, *но не является рядом Фурье—Лебега этой функции.*

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. Пусть даны положительные числа ε, M, n' и интервал (a, b) с двоично-рациональными концами. Можно указать полиномы по системе Хаара

$$Q'(x) = \sum_{k=p}^{q} a_k \chi_k(x), \quad Q(x) = Q'(x) + \sum_{k=p'}^{q'} a_k \chi_k(x) \tag{3}$$

и попарно-непересекающиеся множества E, G, F, удовлетворяющие требованиям:

a) $n' < p' < q' < p < q$; $a_k \chi_k(x) = 0$ при $x \notin [a, b]$;

b) каждое из множеств E, G, F можно представить в виде объединения конечного числа попарно-непересекающихся интервалов с двоично-рациональными концами и $\overline{E} \cup \overline{G} \cup \overline{F} = [a, b]$;

c) $Q'(x) + M = 0$ при $x \in G$;

d) $Q(x) + M = 0$ при $x \in F$, $Q(x) + M = \text{const}$ при $x \in G$;

e) $M + Q(x) > 0$ при $x \in E$, $\{\int_E |M + Q(x)|^{p_0} dx\}^{\frac{1}{p_0}} < \varepsilon$, где p_0 некоторое число $1 \leqslant p_0 < 2$;

f) $\dfrac{|a_k|}{\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\chi_k(x)|} < \varepsilon$ при $p' \leqslant k \leqslant q'$ или $p \leqslant k \leqslant q$.

Доказательство леммы. Пусть

$$2^{t_1} < n' \leqslant 2^{t_1+1}, \quad a = \frac{l_2}{2^{t_2}}, \quad b = \frac{l_3}{2^{t_3}}, \tag{4}$$

где t_1, t_2, t_3, l_2, l_3 натуральные числа. Выберем натуральное число t так, чтобы имело место условие

$$M / \sqrt{2^{t_4}} < \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть $t = \max(t_1 + 1, t_2, t_3, t_4)$. Рассмотрим следующие интервалы:

$$\left(a, a + \frac{1}{2^t}\right), \quad \left(a + \frac{1}{2^t}, a + \frac{2}{2^t}\right) \ldots \left(a + \frac{r-1}{2^t}, b\right).$$

Выберем натуральное число t_5 так, чтобы

$$\left\{M^{p_0}\frac{1}{2^{t_5(2-p_0)}}\left(1+\frac{1}{2^t}-\frac{1}{2^{t_5}}\right)\right\}^{1/p_0}<\frac{\varepsilon}{r}. \qquad (7)$$

Определим множества E_i и e_i следующим образом:

$$E_i=\left(a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i-1}{2^t}+\frac{1}{2^{t_5}}\right),\quad e_i=\left(a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i-1}{2^t}+\frac{1}{2^{2t_5}}\right). \qquad (8)$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ r$$

Обозначим через $\chi_{i,k}(x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ r;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ t_5)$ ту функцию $\chi_n(x)$, которая определяется условием

$$2^{t_5+k-1}<n\leqslant 2^{t_5+k},\ \chi_n(x)=0,\ \text{при}\ x\notin\left[a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i-1}{2^t}+\frac{1}{2^{t_5+k-1}}\right]. \qquad (9)$$

Положим $\chi^{i,s}(x)=\chi_n(x)$ $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ t_5-t)$ для n, которое определяется соотношением

$$2^{t+s-1}<n\leqslant 2^{t+s},\ \chi_n(x)=0,\ \text{при}\ x\notin\left(a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i-1}{2^t}+\frac{1}{2^{t+s-1}}\right). \qquad (10)$$

Рассмотрим следующие полиномы и множества:

$$Q'(x)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t_5}\frac{M\sqrt{2^{k-1}}}{\sqrt{2^{t_5}}}\chi_{i,k}(x),\qquad Q''(x)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{s=1}^{t_5-t}\frac{M\sqrt{2^{s-1}}}{\sqrt{2^{t}}}\chi^{i,s}(x); \qquad (11)$$

$$Q(x)=Q'(x)+Q''(x); \qquad (12)$$

$$E=\bigcup_{i=1}^{r}e_i,\ G=\bigcup_{i=1}^{r}(E_i\setminus e_i),\ F=\left\{\left(a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i}{2^t}\right)\setminus E_i\right\}. \qquad (13)$$

Легко видеть, что они удовлетворяют условиям a), b), c), d), f).

Установим справедливость условия e).

Так как каждая из функций $\chi_{i,k}(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ t_5$ принимает постоянное значение на e_i, а $\chi_1^{i,s}(x)$, $s=1,\ 2,\ \ldots,\ t_5-t$ на E_i, то можно принять следующие обозначения:

$M+Q'(x)=T_i$ при $x\in e_i$; $Q''(x)=L_i$ при $x\in E_i$.

Учитывая, что на множестве E_i $Q'(x)$ имеет нулевой интеграл, из условия c) получим

$$\int_{e_i}T_i dx=\int_{E_i}(M+Q'(x))dx=\int_{E_i}Mdx,\ \text{откуда}\ T_i=2^{t_5}\cdot M.$$

Из условия d), использовав равенство нулю интеграла функции $Q''(x)$ по множеству $\left(a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i}{2^t}\right)$, получим

$$\int_{E_i}L_i dx=M\mu\left\{\left(a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i}{2^t}\right)\setminus E_i\right\},\ \text{откуда}$$

$$L_i=M\cdot 2^{t_5}\left(\frac{1}{2^t}-\frac{1}{2^{t_5}}\right).$$

Использовав неравенство Минковского, из (7) получим

$$\left\{\int_E|M+Q'(x)+Q''(x)|^{p_0}dx\right\}^{1/p_0}\leqslant\sum_{i=1}^{r}\left\{\left[M\cdot 2^{t_5}\left(1+\frac{1}{2^t}-\frac{1}{2^{t_5}}\right)\right]^{p_0}\times\right.$$

$$\times \frac{1}{2^{2l_s}}\Big\}^{\frac{1}{p_s}} = \sum_{l=1}^{r}\Big\{\frac{M^{p_s}}{2^{l_s(2-p_s)}}\Big(1+\frac{1}{2^l}-\frac{2}{2^{l_s}}\Big)^{p_s}\Big\}^{\frac{1}{p_s}} < \varepsilon,$$

тем самым демма доказана.

Дальнейшее доказательство теоремы 3 можно провести по схеме, предложенной в работе (4).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ, Ռ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ

Հաարի տեղափոխված շարքի գործակիցների մասին, որի մասնական գումարների ենթահաջորդականությունը զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային, $f(x)\in L_p$ $(1\leqslant p<2)$

Ներկա աշխատանքում ստացված է հետևյալ արդյունքը՝,

Թեորեմ. Կամայական p թվի համար $(1\leqslant p<2)$ գոյություն ունեն $f(x)$ ֆունկցիա, $f(x)\in L_p$, և Հաարի տեղափոխված անդամներով շարք, որի մասնական գումարների ինչ-որ ենթահաջորդականություն ամենուրեք զուգամիտում է $f(x)$-ին, բայց այդ շարքը $f(x)$-ի Ֆուրյեի շարքը չէ:

Նշենք, որ (4) աշխատանքում ստացվել էր հետևյալ արդյունքը՝ եթե Հաարի տեղափոխված շարքը մասնական գումարների ինչ որ ենթահաջորդականությամբ ամենուրեք զուգամիտում է զրոյի, ապա այդ շարքի գործակիցները հավասար են զրոյի։

Բաղդատելով այս երկու արդյունքները, կստանանք, որ յուրաքանչյուր տեղափոխության դեպքում մասնական գումարների ինչ որ ենթահաջորդականությամբ $f(x)$-ին, $f(x)\in L_p$, ամենուրեք զուգամետ Հաարի տեղափոխված շարքը միակն է, բայց, չնայած դրան, $f(x)$ ֆունկցիայի միջոցով Լեբեգի ինտեգրալը չի վերականգնում այդ շարքի գործակիցները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *G. Faber*, Jahreserlcht Deutschen Math., v. 13, № 19 (1910). [2] *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян*, Изв. АН СССР. Математика, т. 28, 1964. [3] *М. Б. Петровская*, Вестник МГУ. Сер. 1, №5, 1964. [4] *Г. М. Мушегян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 6 № 1 (1971).