ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXX 1985 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян

О панцикличности направленных графов с большими полустепенями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 23/VI 1983)

В работе рассматриваются конечные направленные графы. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в (1). Орграф с p-вершинами называется панциклическим, если он содержит контур любой длины $k (3\leqslant k\leqslant p)$. Орграф называется m-бирегулярным, если для любой его вершины x имеет место $\mathrm{od}(x)=\mathrm{id}(x)=m$. Джексон (2) доказал, что любой направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими $k (k\geqslant 2)$ и не более $2k+2$ вершинами является гамильтоновым. В (3) доказано, что каждый $(2n+1)$-вершинный $(n-1)$-бирегулярный направленный граф G при $n\geqslant 8$ является панциклическим, а при $n\geqslant 5$ G содержит контур любой длины r, $3\leqslant r\leqslant 2n$. В настоящей работе доказывается, что каждый p-вершинный $(p\geqslant 10)$ направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими $[p/2]-1\geqslant 4$ является панциклическим.

Пусть $G=(V(G), E(G))$—орграф с множеством вершин $V(G)$ и множеством дуг $E(G)$. Пусть $A, B\subseteq V(G)$ и $z\in V(G)$. Введем обозначения:

$$E(A\rightarrow B)=\{xy\in E(G)/x\in A,\ y\in B\},$$
$$O(x)=\{y\in V(G)/xy\in E(G)\},\ I(x)=\{y\in V(G)/yx\in E(G)\},$$
$$O_A(x)=A\cap O(x),\ I_A(x)=A\cap I(x),$$
$$\mathrm{id}(x,\ A)=|I_A(x)|,\quad \mathrm{od}(x,\ A)=|O_A(x)|.$$

Число $\mathrm{od}^*(x, A)$ $(\mathrm{id}^*(x, A))$—количество тех вершин подмножества $A\setminus\{x\}$, которые несмежны из вершины (к вершине) x, а число $\beta(x, A)$ количество тех вершин подмножества $A\setminus\{x\}$, которые не смежны с x. (Если $A=V(G)$, то в введенных обозначениях A будем опускать). Через C_r будем обозначать контур длины r, а через $[a, b]$ множество целых чисел не больших b и не меньших a. Запись $A\rightarrow B$ означает, что если $y\in A$ и $z\in B$, то $yz\in E(G)$, а $H\subseteq G$ означает, что H—подграф графа G. Если $x, y\in V(G)$, то $E(x, y)=\varnothing$ означает, что вершины x и y не смежны. Орграф, полученный из орграфа G после переориентации всех дуг, обозначим через $\overline{G}$.

Приведем две леммы, которые используются при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Пусть G есть p-вершинный направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими* $[p/2]-k\geqslant 6k-2$ $(k\geqslant 1)$, *который содержит контур C_r длины r и не содержит контур длины $r+1$. Тогда*

а) *если* $r \geqslant 6k-1$ *и* $x \in A = V(G) \setminus V(C_r)$, *то* $\mathrm{od}(xV(C_r)) \neq 0$;

б) *если* $|A| \geqslant 6k-2$ *и* $x \in A$, *то* $\mathrm{id}(x, A) \neq 0$.

Доказательство. а) Пусть $C_r: v_1 v_2 \ldots v_r v_1 \subset G$ и $[p/2]=n$. Допустим, что $\mathrm{od}(x, V(C_r))=0$. Тогда $\mathrm{od}(x, A) \geqslant n-k$ и $\mathrm{id}(x, V(C_r)) \geqslant r-\beta(x) > r-2k$. Отсюда, поскольку $r \geqslant 6k-1$, то $|B_2(x)| \geqslant 4k-1$, где $B_2(x)$ множество тех вершин v_i контура C_r, для которых $v_{i-2}x \in E(G)$. Так как $E(O_A(x) \to B_2(x)) = \varnothing$, то для любой вершины $u \in B_2(x)$ имеет место $\mathrm{id}^*(u, B_2(x)) \leqslant 2k-1$. Из того, что $|B_2(x)| \geqslant 4k-1$, легко получаем, что $|B_2(x)| = 4k-1$ и $\max\limits_{u \in B_2(x)} \{\mathrm{id}^*(u, B_2(x))\} = 2k-1$. Следовательно $\langle B_2(x) \rangle$ является регулярным турниром и, значит, для любой вершины $u \in B_2(x)$ имеет место $\mathrm{id}^*(u, B_2(x)) = 2k-1$. Далее, так как $r-|B_2(x)|>0$, то существует такая вершина $v_i \in B_2(x)$, что $v_{i+1} \notin B_2(x)$.

Поэтому

$$\mathrm{id}^*(v_i) \geqslant |\{x, v_{i+1}\}| + |O_A(x)| + 2k-1 > n+k+1,$$

а это невозможно.

Утверждение б) леммы 1 доказывается аналогичными рассуждениями.

Лемма 2. *Пусть G—направленный граф с p-вершинами и с минимальными полустепенями не меньшими $[p/2]-k \geqslant 6k-2$ $(k \geqslant 1)$. Тогда любая вершина графа G находится на контуре любой длины $r \in [3, 5]$.*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству теоремы 2 из работы [4].

Теорема. *Пусть G—произвольный p-вершинный направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими $[p/2]-1 = n-1 \geqslant 4$. Тогда G является панциклическим.*

Дадим схему доказательства теоремы. По лемме 2 G содержит контур любой длины $r \in [3, 5]$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что если $r \in [5, p-1]$ и $C_r \subset G$, то $C_{r+1} \subset G$. Допустим, что утверждение теоремы неверно, т. е. существуют направленный граф G, удовлетворяющий условию теоремы, и число $r \in [5, p-1]$ такое, что $C_r \subset G$ и $C_{r+1} \not\subset G$. Пусть $C_r: v_1 v_2 \ldots v_r v_1$ и $A = V(G) \setminus V(C_r)$.

Далее для графа G и контура C_r доказывается последовательность лемм 3—12.

Лемма 3. *Если $B \subseteq V(G)$ и для всякой $x \in B$ имеет место $\beta(x, V(G) \setminus B) = 2$, то $|B| \leqslant |V(G) \setminus B|$.*

Лемма 4. *Если $x \in A$ и $y_1 y_2 \in E(\langle O_A(x) \rangle)$, то $E(\{y_2\} \to I_A(x)) \neq \varnothing$*

Лемма 5. $r \geqslant 6$.

Лемма 6. *Если $x \in A$, то $\mathrm{od}(x, V(C_r)) \geqslant 2$.*

Лемма 7. *Если $x \in A$ и $|A| \geqslant 4$, то $\beta(x, V(C_r)) = 2$ и $\mathrm{od}(x, V(C_r)) \geqslant$*

Лемма 8. *В подграфе $\langle A \rangle$ не существует контура длин 3.*

Лемма 9. *Если $|A| \geqslant 4$ и $x \in A$, то $E(O_A(x) \to I_A(x)) \neq \varnothing$.*

Лемма 10. $|A| < 2$.

Лемма 11. *Если* $E(<A>)=\varnothing$ *и* $x \in A$, *то* $I(x) \neq \{v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\}$, *где* $m = \mathrm{id}(x)+1$.

Лемма 12. $|A| \neq 2$ *и* $|A| \neq 1$.

Так как $|A| \geqslant 1$, то леммы 10 и 12 противоречат друг другу. Из полученного противоречия вытекает справедливость теоремы.

Нужно отметить, что для лемм 4, 6, 7, 9, 11 справедливы и их двойственные утверждения. При доказательстве лемм 8, 11, 12 используем следующее

Замечание. *Если для любой* $x \in A$ *имеет место* $1 \leqslant \beta(x, V(C_r)) \leqslant 2$, *то возможны только случаи* I—II *(с точностью до выбора начальной вершины контура* C_r *и переориентации всех дуг орграфа* G*).*

I. $I_{V(C_r)}(x)=\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ *и* $E(x, v_{s+1})=\varnothing$, *где* $x \in A$ *и* $1 \leqslant s \leqslant r-3$.

II. $I_{V(C_r)}=\{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, v_{s+\alpha+1}, v_{s+\alpha+2}, \ldots, v_{t-1}\}$, $O_{V(C_r)}=\{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{s+\alpha}, v_{t+1}, v_{t+2}, \ldots, v_r\}$, $E(x, \{v_s, v_t\})=\varnothing$, *где* $\alpha \geqslant 1$, $s+\alpha \leqslant t-2$, $s \geqslant 2$ *и* $t \leqslant r-1$.

Из теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 1 (*Джексон* [2]). *Любой направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими* $k(\geqslant 4)$ *и не более* $2k+2$ *вершинами является гамильтоновым.*

Следствие 2 (*Дарбинян и Мосесян* [3]). *Каждый* $(2n+1)$*-вершинный* $(n \geqslant 8)$, $(n-1)$*-бирегулярный направленный граф является панциклическим.*

Следствие 3 (*Чан Кун-Хуан* [5]). *Любой направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими* $k(k \geqslant 4)$ *и не более* $2k+3$ *вершинами является гамильтоновым.*

Следующие примеры показывают, что в теореме ограничения на p и на минимальные полустепени не улучшаемы.

Пример 1. G*—направленный граф с множеством вершин* $X_1 \cup X_2 \cup X_3$, *где* $|X_i|=3$, $1 \leqslant i \leqslant 3$ *и* $xy \in E(G)$ *тогда и только тогда, когда* $x \in X_i$ *и* $y \in X_{i+1(\mathrm{mod}(3))}$.

Очевидно, что G является 3-бирегулярным и не содержит контуров длины 4, 5, 7 и 8.

Пример 2. G*—направленный граф с множеством вершин* $\{x_1, x_2, \ldots, x_{11}\}$ *и* $x_i x_j \in E(G)$ *тогда и только тогда, когда* $(j-i)\ \mathrm{mod}(11)=1, 2, 3$.

Очевидно, что G является 3-бирегулярным и не содержит контура длины 3.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Մեծ կիսաաստիճաններով ուղղորդված գրաֆների պանցիկլիկության մասին

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում են վերջավոր ուղղորդված գրաֆներ։ Ապացուցվում է հետևյալ պնդումը՝.

Թեորեմ. Դիցուք G-ն կամայական p-գագաթանի ուղղորդված գրաֆ է, որի մինիմալ կիսաաստիճանները փոքր չեն $[p/2]-1\geqslant 4$ թվից: Ապա՝ G-ն հանդիսանում է պանցիկլիկ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари*, Теория графов, Мир, М., 1973. [2] *B. Jakson*, Journal of Graph Theory, v. 5 (1981). [3] *С. Х. Дарбинян, К. М. Мосесян*. ДАН АрмССР, т. 67, №4 (1978). [4] *С. Х. Дарбинян*, Tanulmányok, Будапешт, № 135 (1982). [5] *Zhang Cun-Quan*, Инъюн игусюе сюэбао, Acta math. appl. sin., 5, № 4 (1982).