

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Академик АН Армянской ССР С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян

**Вынужденные колебания тонкой идеально проводящей пластинки
 в продольном магнитном поле**

(Представлено 26/IV 1984)

Рассматривается задача вынужденных колебаний идеально проводящей тонкой пластинки в продольном магнитном поле, когда пластинка под действием нормально приложенной нагрузки колеблется по форме цилиндрической поверхности, а продольное магнитное поле направлено перпендикулярно образующим этой поверхности.

Показано существенное влияние напряженности магнитного поля на частоту и амплитуду колебания пластинки.

1. Пусть идеально проводящая, упругая изотропная тонкая пластинка постоянной толщины $2h$ под действием поперечной нагрузки $P(x, t)$ колеблется во внешнем постоянном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}$, направленным по оси ox . Пластинка отнесена к декартовой системе координат x, y, z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью $хоу$. Граничные условия, нагрузка и форма пластинки таковы, что она колеблется по форме цилиндрической поверхности с образующими параллельными координатной линии $оу$. Считается, что пластинка совершает симметричные колебания, т. е. прогиб пластинки $w(x, t)$ является четной функцией переменной x в области пластинки $[-a, a]$.

Задача решается в линейной постановке ^(1,2), при этом принимаются следующие предположения ⁽¹⁻³⁾: а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях; б) магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки и окружающей среды считаются равными единице; в) влияние токов смещения на характеристики колебаний не учитываются.

В силу принятых предположений задача вынужденных колебаний идеально проводящей пластинки, занимающей область $x \in [-a, a]$ в продольном магнитном поле $\vec{H}(H, 0, 0)$, сводится к следующему интегро-дифференциальному уравнению ⁽³⁾:

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{hH^2}{2\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\ = P(x, t) - \frac{H^2}{2\pi^2} \int_{-a}^x \frac{1}{x-\xi} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-\xi^2}} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость пластинки, E — мо-

дуль упругости, ν —коэффициент Пуассона, ρ —плотность материала пластинки, ε —коэффициент затухания при отсутствии магнитного поля

2. Рассмотрим задачу вынужденных колебаний шарнирно-опертой по краям $x=-a$, $x=a$ пластинки-полосы шириною $2a$, под действием нормально приложенной нагрузки $P(x, t)=P(x)\sin\omega t$.

Решение исходного уравнения (1.1) будем искать в виде бесконечного ряда

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{2n-1}{2a} \pi. \quad (2.1)$$

Представление (2.1) удовлетворяет известным условиям шарнирного опирания по краям $x=-a$, $x=a$, а также требованию четности функции $w(x, t)$ по переменной x .

Подставляя (2.1) в (1.1) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_n(t)$:

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \varepsilon \frac{df_m}{dt} + \Omega_m^2 f_m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f_n(t) = c_m \sin \omega t \quad (2.2)$$

$$(m=1, 2, 3, \dots),$$

$$\text{где} \quad \Omega_m^2 = \Omega_{0m}^2 + \frac{hH^2}{4\rho h} \lambda_m^2, \quad \Omega_{0m}^2 = \frac{D\lambda_m^4}{2\rho h},$$

$$a_{mn} = -\frac{\lambda_n H^2}{4\rho h a \pi^2} \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a \frac{1}{x-\xi} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-\xi^2}} \sin \lambda_n \xi d\xi \right) \cos \lambda_m x dx =$$

$$= \frac{H^2}{4\rho h a} \left[\mu_n J_0(\mu_m) J_1(\mu_n) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} k J_{2k}(\mu_m) J_{2k}(\mu_n) \right],$$

$$\mu_k = a \lambda_k, \quad c_m = \frac{1}{2\rho h a} \int_{-a}^a P(x) \cos \lambda_m x dx,$$

Ω_{0m} —частоты собственных колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля, J_k —функции Бесселя действительного аргумента. При вычислении коэффициентов a_{mn} использованы следующие известные соотношения: $\cos(z \cos \theta) = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(z) \cos 2k\theta$, $\sin(z \cos \theta) =$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} J_{2k-1}(z) \cos(2k-1)\theta, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos k\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} = \frac{\sin k\varphi}{\sin \varphi},$$

$$(k=0, 1, 2, \dots),$$

Если возмущающая сила отсутствует ($c_m=0$), то уравнения (2.2) являются однородными и характеризуют собственные магнитоупругие колебания идеально проводящей пластинки в продольном магнитном поле. Исследование влияния магнитного поля на частоту свободных колебаний для простоты проводим, принимая $\varepsilon=0$. Тогда из (2.2) полу-

чим следующие уравнения собственных магнитоупругих колебаний пластинки:

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \Omega_m^2 f_m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f_n(t) = 0. \quad (2.4)$$

Представим решение системы (2.4) в виде

$$f_n(t) = A_n e^{i\omega t}, \quad (2.5)$$

где ω — частота колебаний пластинки, A_n — неизвестные коэффициенты.

Подставляя (2.5) в систему (2.4), приходим к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно A_n :

$$(\Omega_m^2 - \omega^2) A_m + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} A_n = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.6)$$

Отсюда для определения частоты колебаний получим следующее характеристическое уравнение:

$$|(\Omega_m^2 - \omega^2) \delta_{mn} + a_{mn}| = 0. \quad (2.7)$$

Легко показать ⁽⁴⁾, что определитель (2.7) относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

Из (2.7) для первой частоты магнитоупругих колебаний получается выражение

$$\omega_1^2 = \Omega_{01}^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \left(\lambda_1^2 + \frac{2}{ah} \right), \quad (2.8)$$

где использовано, что $J_0(\mu_1) = 0,484$; $J_1(\mu_1) = 0,564$; $J_2(\mu_1) = 0,244$, а также тот факт, что значения $J_k(\mu_1)$ для $k > 4$ меньше 10^{-2} .

Формула (2.8) подтверждает известный факт, что наличие продольного магнитного поля приводит к увеличению частоты колебаний пластинки ^(1,2). В табл. 1 приведены значения относительной частоты $\bar{\Omega}_1 = \omega_1/\Omega_{01}$ при различных значениях h/a и напряженности магнитного поля. Таблица составлена по уравнению (2.8) при $\nu = 0,36$; $E = 7 \cdot 10^{11}$ дин/см² (отожженный алюминий).

Таблица 1

Значения ω_1/Ω_{01}					
$\frac{10^{-3} \cdot H, \text{э}}{10^2 h/a}$	1	5	10	20	30
1	1,049	1,871	3,317	6,403	9,531
2	1,007	1,145	1,500	2,449	3,500
0,5	1,342	4,583	9,00	17,92	26,85

Из таблицы видно, что магнитное поле напряженности $5 \cdot 10^3$ эрстед в случае тонких пластинок может в несколько раз увеличить частоту упругих колебаний.

Вернемся к основной задаче вынужденных колебаний пластинки, ограничиваясь первым приближением. Тогда из системы (2.2) в силу (2.8) получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \epsilon \frac{df_1}{dt} + \omega_1^2 f_1 = c_1 \sin \omega t, \quad (2.9)$$

Общее решение уравнения (2.9) имеет вид

$$f_1(t) = (B_1 \cos pt + B_2 \sin pt) e^{-\epsilon t/2} + M_1 \cos \omega t + M_2 \sin \omega t, \quad (2.10)$$

где B_1 и B_2 — постоянные, которые в каждом частном случае должны быть определены из начальных условий,

$$M_1 = - \frac{\epsilon \omega}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\epsilon \omega)^2} c_1, \quad (2.11)$$

$$M_2 = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\epsilon \omega)^2} c_1; \quad p^2 = \omega_1^2 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2.$$

Первый член правой части представления (2.10), содержащий множитель $e^{-\epsilon t/2}$, описывает свободные затухающие магнитоупругие колебания пластинки. В дальнейшем будем рассматривать только вторую часть общего решения (2.10), которая описывает установившиеся вынужденные колебания, имеющие место только по истечении времени, необходимого для затухания свободных колебаний. Амплитуда этих колебаний в случае, когда частота вынуждающей силы равна первой резонансной ($\omega = \Omega_{01}$), можно представить в виде

$$A = c_1 [(\omega_1^2 - \Omega_{01}^2)^2 + (\epsilon \Omega_{01})^2]^{-1/2}. \quad (2.12)$$

При этом если отсутствует магнитное поле ($\omega_1 = \Omega_{01}$, $H = 0$), из (2.12) для амплитуды резонансных колебаний получим известное выражение (5)

$$A_0 = c_1 (\epsilon \Omega_{01})^{-1}. \quad (2.13)$$

Сравнивая (2.12) с (2.13) можем записать

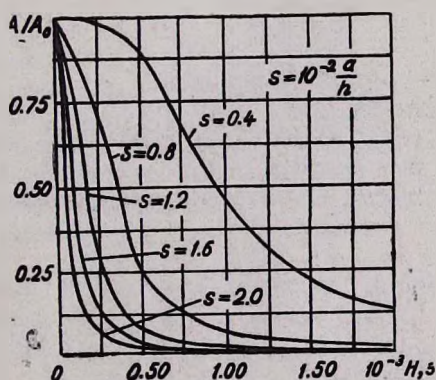
$$A = A_0 \left[1 + \left(\frac{\omega_1^2 - \Omega_{01}^2}{\epsilon \Omega_{01}} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (2.14)$$

из которого видно, что присутствие магнитного поля может существенно уменьшить амплитуду вынужденных колебаний в области резонанса. Учитывая (2.8), формулу (2.14), с точностью $1 + h/a \approx 1$, можно представить в виде

$$A = A_0 \left\{ 1 + \left[\frac{48(1 - \nu^2)}{\pi^4} \frac{H^2}{\psi E} \left(\frac{a}{h} \right)^3 \right]^2 \right\}^{-1/2}, \quad (2.15)$$

где $\psi = 2\pi\epsilon/\Omega_{01}$ — относительное рассеяние энергии вследствие конструкционного демпфирования.

На основании уравнения (2.15) произведены вычисления относительной амплитуды вынужденных магнитоупругих колебаний пластинки в зависимости от напряженности заданного магнитного поля при различных значениях h/a . Для расчета принято $E = 7 \cdot 10^{11}$ дин/см²; $\nu = 0,36$; $\psi = 0,03$. Результаты подсчета значений A/A_0 приведены в табл. 2 и на рисунке.



Значения A/A_0

$\frac{10^{-3}H, \text{э}}{10^{-2}a/h}$	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	10
0.4	1	0.902	0.462	0.225	0.129	0.0052
0.8	1	0.252	0.065	0.0289	0.0163	0.000641
1.2	1	0.0769	0.0193	0.00857	0.00482	$0.193 \cdot 10^{-3}$
1.6	1	0.0325	0.00814	0.00362	0.00203	$0.813 \cdot 10^{-4}$
2.0	1	0.0167	0.00417	0.00185	0.00104	$0.417 \cdot 10^{-4}$

Рассматривая таблицу и приведенные кривые, замечаем, что при наличии магнитного поля амплитуда резонансных колебаний существенно уменьшается (при $2h/a = 10^{-2}$; $H = 1 \cdot 10^3$ э амплитуда колебаний уменьшается более чем в 900 раз).

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐԶՈՒՄՅԱՆ, Գ. Ե. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ

Իդեալական հաղորդիչ սալի ստիպողական տատանումները երկայնական մագնիսական դաշտում

Աշխատանքում ստացված է անվերջ էլեկտրահաղորդականություն ունեցող սալի ստիպողական տատանումների հավասարումը երկայնական մագնիսական դաշտում: Ստացված հավասարման հիման վրա ուսումնասիրված են հոդակապորեն ամրացված սալի ազատ և ստիպողական տատանումները: Ստացված են բանաձևեր սեփական տատանումների հաճախականության և ստիպողական տատանումների ամպլիտուդաների որոշման համար: Ցույց է տրված, որ երկայնական մագնիսական դաշտի առկայությունը կարող է մի քանի անգամ մեծացնել սեփական տատանումների հաճախականությունը և էապես փոքրացնել ռեզոնանսային տատանումների ամպլիտուդան:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977. ² S. Kaliski, Proc. Vibration Probl., v. 3, № 4 (1962). ³ Г. Е. Багдасарян, Прикладная механика, т. 19, № 12 (1983). ⁴ В. В. Болотин, Некоэрвативные задачи теории упругой устойчивости, Физматгиз, М., 1961. ⁵ С. П. Тимошенко, Колебания в инженерном деле, Физматгиз, М., 1959.