ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 1

УДК 519.22

МАТЕМАТИКА

М. С. Гиновян

О критерии согласия для проверки сложной гипотезы о спектре гауссовской стационарной последовательности

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 28/X 1983)

1. Пусть x_t, $t=0, \pm 1, \ldots$ гауссовская стационарная последовательность с нулевым средним ($Ex_t=0$). Предположим, что на основе одной реализации конечной длины n, $x_1, \ldots, x_n$, последовательности x_t, требуется проверить гипотезу H_0 о том, что спектральная плотность последовательности x_t имеет вид $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Предположим, далее, что гипотеза H_0 сложная, т. е. гипотетическая спектральная плотность $f(\lambda)$ зависит от неизвестного p-мерного параметра $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_p)' \in S$ (S—открытое множество евклидова пространства R^p), т. е. $f(\lambda)=f(\lambda; \theta)$, $\theta \in S$.

Пусть $\Phi_n(\theta)=(\Phi_{1n}(\theta), \ldots, \Phi_{mn}(\theta))'$—$m$ ($m \geqslant p$)-мерный случайный вектор с компонентами

$$\Phi_{jn}(\theta)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{I_n(t)}{f(t; \theta)}-1\right]\varphi_j(t)dt, \quad j=\overline{1, m},$$

где $\varphi_j(t)$, $j=\overline{1, m}$, некоторая ортонормированная система функций на $[-\pi, \pi]$, а

$$I_n(t)=\frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{j=1}^{n} x_j e^{itj}\right|^2$$

—периодограмма последовательности x_t.

Заметим, что при некоторых достаточно широких условиях на спектральную плотность $f(\lambda; \theta)$ и функции $\varphi_j(\lambda)$, $j=\overline{1, m}$, случайный вектор $\Phi_n(\theta)$ при $\theta=\theta_0$ (θ_0 истинное значение параметра θ) имеет асимптотически (при $n \to \infty$) нормальное распределение с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей.

Если бы проверялась простая гипотеза, т. е. если бы истинное значение θ_0 параметра θ было известно, то [1-4] для проверки гипотезы можно было воспользоваться статистикой

$$X_n^2(\theta) = \sum_{j=1}^{m} \Phi_{jn}^2(\theta), \tag{1}$$

которая при $n \to \infty$ и $\theta=\theta_0$ имеет χ^2-распределение с m степенями свободы [1].

Но здесь нас будет интересовать случай проверки сложной гипотезы H_0. Следуя [2,3], для проверки сложной гипотезы H_0 также воспользуемся статистикой (1), где, однако, вместо неизвестного параметра θ подставим некоторую его статистическую оценку. При этом, разумеется, асимптотическое распределение статистики (1) будет зависеть от выбранной нами оценки ([3]).

Предельное распределение статистики (1) после подстановки в нее вместо неизвестного параметра θ некоторой его статистической оценки для гауссовких стационарных процессов исследовалось в работах Осидзе ([6,7]) и Джапаридзе ([4]). Однако в этих работах предполагается, что спектральная плотность $f(\lambda)$ процесса x_t отделена от нуля, т. е. она удовлетворяет условию $\inf_\lambda f(\lambda)>0$.

Нас будет интересовать случай, когда спектральная плотность $f(\lambda)$ имеет нули того или иного порядка. В настоящей работе в качестве оценки неизвестного параметра θ берется асимптотическая оценка максимального правдоподобия. Находится асимптотическое распределение статистики (1) в следующих двух случаях:

а) гипотетическая спектральная плотность $f(\lambda;\theta)$ имеет „слабые" нули, не зависящие от параметра θ, т. е. функция $f(\lambda)$ имеет порядок $|\lambda|^\alpha$, $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$;

б) гипотетическая спектральная плотность $f(\lambda;\theta)$ имеет как „слабые", так и „сильные" нули полиномиального типа, т. е. она имеет вид

$$f(\lambda;\theta)=|Q_N(e^{i\lambda})|^2 h(\lambda;\theta),$$

где $Q_N(e^{i\lambda})$, $(|Q_N(0)|=1)$, полином степени N с корнями на единичной окружности, не зависящими от параметра θ, а функция $h(\lambda;\theta)$ имеет „слабые" нули, также не зависящие от параметра θ.

2. В этом пункте мы рассмотрим случай а). Предположим, что выполнены следующие условия:

A1) истинное значение θ_0 параметра θ является внутренней точкой множества S;

A2) если θ_1 и θ_2 разные значения параметра θ, принадлежащие S, то $f(\lambda;\theta_1)\neq f(\lambda;\theta_2)$ почти всюду (λ);

A3) при $\theta\in S$

$$\ln f(\lambda;\theta)=u(\lambda;\theta)+\tilde{v}(\lambda;\theta),$$

где $u(\lambda;\theta)$ и $v(\lambda;\theta)$ ограниченные функции ($\tilde{v}$—функция, гармонически сопряженная с функцией v, т. е. $\tilde{v}=\operatorname{Im} w$, $v=\operatorname{Re} w$, для некоторой функции w из класса Харди H^2) и $\|v\|_\infty<\frac{\pi}{2}$;

A4) $\sum\limits_{|k|>n}|a_k(\theta)|^2=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\quad n\to\infty$;

A5) $\sum\limits_{|k|>n}|c_k(\theta)|^2=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\quad n\to\infty$;

A6) $\sum\limits_{|k|>n}|b_{ki}(\theta)|^2=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\quad n\to\infty$, $\quad i=\overline{1,p}$;

A7) $\sum\limits_{|k|>n} |l_{kj}(\theta)|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty, \ j=\overline{1, m},$

при $\theta \in S$, где $a_k(\theta)$, $c_k(\theta)$, $b_{kl}(\theta)$ и $l_{kj}(\theta)$—коэффициенты Фурье функций $\ln f(\lambda, \theta)$, $f(\lambda; \theta)$, $\frac{1}{f(\lambda; \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_l} \ln f(\lambda; \theta)$ и $\frac{\varphi_j(\lambda)}{f(\lambda; \theta)}$ соответственно;

A8) функции $\frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda; \theta)$, $k=\overline{1, p}$, непрерывны по (λ, θ), $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\theta \in S$, а функции $\frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_j} \ln f(\lambda; \theta)$, $\frac{\partial^3}{\partial \theta_k \partial \theta_j \partial \theta_l} \ln f(\lambda; \theta)$, k, j, $l=\overline{1, p}$, непрерывны по (λ, θ), $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\theta \in N_\delta(\theta_0)$ $(N_\delta(\theta_0)=\{\theta; |\theta-\theta_0|<\delta\}$—некоторая окрестность точки $\theta_0)$;

A9) матрица $\Gamma(\theta_0)=\|\gamma_{kj}(\theta_0)\|_{k, j=\overline{1, p}}$,

$$\gamma_{kj}(\theta_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda; \theta)\right]_{\theta=\theta_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(\lambda; \theta)\right]_{\theta=\theta_0} d\lambda$$

невырождена.

Рассмотрим асимптотическую оценку максимального правдоподобия $\bar{\theta}_n$ неизвестного параметра θ, которая является решением следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} L_n(\theta) = 0, \quad k=\overline{1, p},$$

где
$$L_n(\theta) = -\frac{n}{2}\left\{\ln 2\pi + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\ln f(\lambda; \theta) + \frac{I_n(\lambda)}{f(\lambda; \theta)}\right] d\lambda\right\}$$

—логарифм асимптотической функции правдоподобия ([5]).

Пусть $B(\theta)=\|\beta_{kj}(\theta)\|_{\substack{k=\overline{1, m}\\ j=\overline{1, p}}}$ есть $(m \times p)$-матрица с элементами

$$\beta_{kj}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(\lambda; \theta) d\lambda.$$

Теорема 1. *При условиях* A1—A9 *статистика*

$$X^2(\bar{\theta}_n) = \sum_{j=1}^{m} \Phi_{jn}^2(\bar{\theta}_n)$$

асимптотически (при $n \to \infty$) распределена так же, как случайная величина

$$\sum_{j=1}^{m-p} \xi_j^2 + \sum_{j=1}^{p} \nu_j \xi_{m-p+j}^2, \tag{2}$$

где ξ_j, $j=\overline{1, m}$, независимые нормальные случайные величины со средним нуль и единичной дисперсией, а числа $\nu_1, \ldots, \nu_p$ удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \nu_j < 1$, $j=\overline{1, p}$, и являются корнями относительно ν уравнения $\det[(1-\nu)\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0)]=0$.

Доказательство следует из следующих лемм.

Лемма 1. *Асимптотическая оценка максимального правдоподобия состоятельна, асимптотически нормальна и асимптотически эффективна.*

Лемма 2. *При $n \to \infty$ справедливо соотношение*

$$\Phi_n(\bar{\theta}_n) = \Phi_n(\theta_0) - \sqrt{n} B(\theta_0)(\bar{\theta}_n - \theta_0) + o_p(1),$$

где слагаемое $o_p(1)$ при $n \to \infty$ стремится к нулю по вероятности.

3. Теперь рассмотрим случай б). Предположим, что выполнены следующие условия:

Б1) выполнены условия $A1$, A2, A3, A4, A8 и A9 пункта 2, в применении к функции $h(\lambda; \theta)$;

Б2) $\sum\limits_{|k|>n} |\tilde{c}_k(\theta)|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}\right)$, $n \to \infty$,

Б3) $\sum\limits_{|k|>n} |\tilde{b}_{kl}(\theta)|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}\right)$, $n \to \infty$, $l = \overline{1, p}$;

Б4) $\sum\limits_{|k|>n} |\tilde{l}_{kj}(\theta)|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}\right)$, $n \to \infty$, $j = \overline{1, m}$,

при $\theta \in S$, где $\tilde{c}_k(\theta)$, $\tilde{b}_{kl}(\theta)$ и $\tilde{l}_{kj}(\theta)$—коэффициенты Фурье функций $h(\lambda; \theta)$, $\frac{1}{h(\lambda; \theta)}$ $\frac{\partial}{\partial \theta_l} \ln h(\lambda; \theta)$ и $\frac{\varphi_j(\lambda)}{h(\lambda; \theta)}$ соответственно.

Введем следующие обозначения: L_f^2—это L^2-пространство, построенное по мере $f(\lambda)d\lambda$; $H_n(f)$—пространство полиномов степени n, рассматриваемое как подпространство пространства L_f^2; $G_n^f(\lambda, \mu)$—воспроизводящее ядро пространства $H_n(f)$ (определение и основные свойства воспроизводящего ядра см. ([8])).

Рассмотрим случайный вектор $\tilde{\Phi}_n(\theta) = (\tilde{\Phi}_{1n}(\theta), \ldots \tilde{\Phi}_{mn}(\theta))'$,

$$\tilde{\Phi}_{jn}(\theta) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\tilde{I}_n(\lambda)}{h(\lambda; \theta)} - 1\right] \varphi_j(\lambda) d\lambda, \quad j = \overline{1, m},$$

где

$$\tilde{I}_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \int\int\limits_{-\pi}^{\pi} G_n^{|Q_N|^2}(\lambda, t) G_n^{|Q_N|^2}(t, \mu) |Q_N(e^{it})|^2 Z^f(d\lambda) \overline{Z^f(d\mu)}$$

—обобщенная периодограмма последовательности x_t ($Z^f(d\lambda)$—ортогональная стохастическая мера, участвующая в спектральном представлении последовательности x_t: $x_t = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} Z^f(d\lambda)$).

Пусть $\hat{\theta}_n$—асимптотическая оценка максимального правдоподобия неизвестного параметра θ, которая в рассматриваемом здесь случае определяется как корень следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left\{\ln h(\lambda; \theta) + \frac{\tilde{I}_n(\lambda)}{h(\lambda; \theta)}\right\} d\lambda\right] = 0, \quad k = \overline{1, p}.$$

И, наконец, пусть $\Gamma(\theta)=\|\gamma_{kj}(\theta)\|_{\substack{k=\overline{1,p}\\ j=\overline{1,p}}}$ и $B(\theta)=\|\beta_{kj}(\theta)\|_{\substack{k=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,p}}}$ — соответственно $(p\times p)$ и $(m\times p)$ матрицы с элементами

$$\tilde{\gamma}_{kj}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\ln h(\lambda;\theta)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln h(\lambda;\theta)d\lambda,$$

$$\tilde{\beta}_{kj}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln h(\lambda;\theta)d\lambda.$$

Теорема 2. *При условиях* Б1—Б4 *статистика*

$$\tilde{X}^2(\hat{\theta}_n)=\sum_{j=1}^{m}\tilde{\Phi}_{jn}^2(\hat{\theta}_n)$$

асимптотически (*при* $n\to\infty$) *распределена так же, как случайная величина* (2), *где теперь числа* ν_j, $(0\leqslant\nu_j<1)$, $j=\overline{1,p}$, *являются корнями относительно* ν *уравнения*

$$\det[(1-\nu)\tilde{\Gamma}(\theta_0)-\tilde{B}'(\theta_0)\tilde{B}(\theta_0)]=0.$$

Замечание. Функции $\varphi_j(\lambda)$, $j=\overline{1,m}$, также могут зависеть от неизвестного параметра θ. В таком случае параметр θ и здесь должен быть заменен его оценкой ($\tilde{\theta}_n$—в случае а) и $\hat{\theta}_n$—в случае б)): предельное распределение получаемой при этом статистики не меняется.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ս. ԳԻՆՈՎՅԱՆ

Գաուսյան ստացիոնար հաջորդականության սպեկտրի համար բարդ հիպոթեզի ստուգման համաձայնության չափանիշի մասին

Դիցուք x_t, $t=0, \pm 1, \ldots$ *գաուսյան ստացիոնար հաջորդականություն է, որի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է զրոյի։ Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը. օգտագործելով համաձայնության չափանիշը,* $x_1, \ldots x_n$ *վերցվածքի միջոցով ստուգել* H_0 *բարդ հիպոթեզը այն մասին, որ* x_t *հաջորդականության սպեկտրալ խտությունն ունի* $f(\lambda;\theta)$ *տեսքը, որտեղ* $\lambda\in[-\pi,\pi]$, *իսկ* $\theta=(\theta_1, \ldots \theta_p)'$ *անհայտ վեկտորական պարամետր է։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. Хеннан*, Анализ временных рядов, Наука, М., 1964. [2] *Г. Крамер*, Математические методы статистики, Мир, М., 1975. [3] *М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт*, Статистические выводы и связи, Наука, М., 1973. [4] *К. О. Джапаридзе*, Оценка параметров и проверка гипотез в спектральном анализе стационарных временных рядов, ТГУ, Тбилиси, 1981. [5] *М. С. Гиновян*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 108 (1981). [6] *А. Г. Осидзе*, Сообщ. АН ГССР, т. 74, № 2 (1974). [7] *А. Г. Осидзе*, Сообщ. АН ГССР, т. 77, № 2 (1975). [8] *Н. Ароншайн*, Сб. переводов «Математика», т. 7, № 2 (1963).