ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 1

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

С. А. Иванов

Базисы из рациональных вектор-функций и множества Карлесона

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 19/X 1983)

В пространстве Харди $H^2_+(E)$ вектор-функций, принимающих значения в гильбертовом пространстве E, рассматривается система $X=\{X_\lambda\}_{\lambda\in\sigma}$, $X_\lambda=(k-\bar{\lambda})^{-1}\delta_\lambda E$ собственных подпространств оператора модели Б. С. Надя — Ч. Фояша, где σ—спектр системы — является счетным множеством в верхней полуплоскости, а δ_λ—ортопроектор в E. В работе дан критерий базисности системы X, спектр которой является конечным объединением карлесоновых множеств σ_j. Этот критерий не требует асимптотической стабилизации подпространств $\{\delta_\lambda E\}_{\sigma_j}$, а состоит в „равномерной базисности" подпространств $\delta_\lambda E$ внутри групп, выделяемых в соответствии с теоремой В. И. Васюнина.

При $\dim E>1$ такие системы впервые изучались в ([1]), где было введено понятие серии Карлесона $C(\Delta)$—такого семейства X, что $\sigma(X)$ есть карлесоново множество

$$\inf_{\mu\in\sigma}\prod_{\substack{\lambda\in\sigma\\ \lambda\neq\mu}}\left|\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\bar{\mu}}\right|>0 \qquad (C)$$

и найдется такой проектор Δ в E, что $\delta_\lambda\to\Delta$. Там же показано, что если X можно разбить на конечное число серий Карлесона $C(\Delta_j)$ и ортопроекторы Δ_j близки в некотором смысле к попарно ортогональным, то X—базис Рисса.

Существование у подсистемы X „направляющих ортопроекторов" является, конечно, сильным ограничением. Мы откажемся от него, используя построения и результаты В. И. Васюнина.

Определим для точек верхней полуплоскости гиперболическую метрику формулой $\operatorname{th}\frac{1}{2}\rho(x, y)=|x-y|\,|x-\bar{y}|^{-1}$, и через $D(\lambda, \rho)$ обозначим круг в этой метрике с радиусом ρ и центром в λ.

П р е д л о ж е н и е ([2,3]). Пусть $\sigma=\bigcup\limits_1^N\sigma_j$, $\sigma_j\in(C)$, $G_m(\rho)$—связная компонента $\bigcup\limits_\sigma D(\lambda, \rho)$, $\Lambda_m(\rho)=\sigma(X)\cap G_m(\rho)$, подпространства $L_m(\rho)$ суть $\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda_m(\rho)}(k-\bar{\lambda})^{-1}$. Тогда семейство $\{L_m(\rho)\}$ образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки в $H^2_+(\mathrm{C})$ и при $\rho<\rho_0=\frac{1}{2N}\min\limits_j\inf\limits_{\lambda\neq\mu;\lambda,\mu\in\sigma_j}\rho(\lambda, \mu)$ размерность $L_m(\rho)$ не превосходит N.

Определим в пространстве семейств векторов $\{g=\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_m},\ g_\lambda\in\in\delta_\lambda E,\ \|g\|=\sum\|g_\lambda\|_E\}$ операторную матрицу Грама формулой $\Gamma_m(\rho)=\{\delta_\lambda\delta_\mu\}_{\lambda,\mu\in\Lambda_m}$. Если все ортопроекторы δ_λ одномерны (в этом случае, фактически, речь идет о семействе вектор-функций, а не подпространств), то Γ_m в базисе $\{e_\lambda\}$ имеет матрицу $\{(e_\lambda, e_\mu)_E\}_{\lambda,\mu\in\Lambda_m}$, $e_\lambda\in\delta_\lambda E$.

Теорема. *Пусть $\sigma(X)$ есть объединение конечного числа карлесоновых множеств. Для того чтобы система X являлась базисом Рисса, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого ρ*

$$\sup_m\|\Gamma_m^{-1}(\rho)\|<\infty. \qquad (1)$$

Схема доказательства. Из предложения вытекает базисность системы $\{K_m\}$, $K_m=\bigvee_{\Lambda_m}X_\lambda$. Базисность X равносильна тогда „равномерной по m“ базисности семейств $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_m}$ в K_m (в том, например, смысле, что для ортогонализаторов V_m систем $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_m}$ справедливы оценки $\sup_m\|V_m\|<\infty$ и $\sup_m\|V_m^{-1}\|<\infty$). Можно доказать эквивалентность такой равномерной базисности и выполнения неравенства (1) при достаточно малом ρ. При этом используется близость в $H_+^2(\mathbf{C})$ при малых ρ функций $(k-\bar\lambda)^{-1}$, $\lambda\in\Lambda_m$, которая вытекает из справедливого при $\rho<\rho_0$ неравенства $\operatorname{diam} G_m\leqslant 2N_\rho$.

Следствие. Если X есть конечное объединение серий Карлесона $C(\Delta_j)$, а семейство подпространств Δ_jE образует базис в своей линейной оболочке, то X—базис Рисса.

Отметим, что этот результат может быть получен из указанной выше теоремы Н. К. Никольского — Б. С. Павлова о сериях Карлесона, если заметить, что для изоморфизма T, $T: E\to E$, переводящего базис $\{\Delta_jE\}$ в ортогональный, система TX есть объединение уже асимптотически ортогональных серий Карлесона.

Замечание. Представляет интерес явно сформулировать факт, прямо следующий из результатов, приведенных в ([2]): если $\dim E<\infty$, X—равномерно минимальная система и $\sigma(X)$ лежит в полосе $0<c\leqslant\leqslant\operatorname{Im}k\leqslant C<\infty$, то X—базис Рисса.

В заключение приведем характерные примеры базисных систем. Для построения $G_m(\rho)$ используем евклидову метрику, эквивалентную в полосе $0<c\leqslant\operatorname{Im}k\leqslant C<\infty$ гиперболической. Все δ_λ в примерах одномерны, и удобнее рассматривать семейства вектор-функций, а не подпространств.

Пример 1. $X=\{(k-n+i)^{-1}e_n^{(1)}\}\cup\{(k-n+\gamma_n+i)^{-1}e_n^{(2)}\}$, $n\in\mathbf{Z}$, $|\gamma_n|<<1/4$, где $e_n^{(1)}=(\sin\alpha_n, \cos\alpha_n)$, $e_n^{(2)}=(\sin(\alpha_n+\beta), \cos(\alpha_n+\beta))$, $\alpha_n\in\mathbf{R}$, $\beta\in\in(0, 2\pi)$. В этом примере, несмотря на произвольное поведение векторов $e_n^{(1)}$, „жесткая связь“ $e_n^{(1)}$ и $e_n^{(2)}$ дает при $\rho<1/2$ оценку $\Gamma_m=\begin{pmatrix}1 & \cos\beta\\ \cos\beta & 1\end{pmatrix}\geqslant(1-\cos\beta)I$ и X—базис Рисса.

Пример 2. $X=\{(k-2n+i)^{-1}e_1\}\cup\{(k-2n-1+i)^{-1}e_2\}\cup\{(k-n+\gamma_n+i)^{-1}e_3\}$, $n\in\mathbf{Z}$, $|\gamma_n|<1/4$. Система X является объединением трех „чистых“ серий Карлесона $C(e_1)$, $C(e_2)$ и $C(e_3)$. Если вектора e_1, e_2, e_3 линейно зависимы, то воспользоваться следствием нельзя. Однако $\sigma(X)$ есть объединение только двух карлесоновых множеств $\{n+i\}$, $\{n-\gamma_n+i\}$, и при $\rho<1/2$ в одну группу $\Lambda_m(\rho)$ попадет не более двух точек спектра. Если вектора e_j различны, то тогда выполнено (1) и X—базис Рисса.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Ս. Ա. ԻՎԱՆՈՎ

Բազիսներ ռացիոնալ վեկտոր-ֆունկցիաներից և կառլեսոնյան բազմություններ

Վերին կիսահարթությունում անալիտիկ E արժեքանի Հարդիի տարածությունում դիտարկվում է X ենթատարածությունների $\{(k-\bar{\lambda})^{-1}\delta_\lambda E\}_{\lambda\in\sigma(X)}$ համակարգ, որտեղ՝ δ_λ-ն օրթոպրոեկտոր է E-ում, իսկ $\sigma(X)$-ը՝ հաշվելի բազմություն է վերին կիսահարթությունից։ Ստացվել են պայմաններ, որոնց առկայության դեպքում X-ը կազմում է Ռիսի բազիս իր գծային թաղանթի փակույթում Հարդիի տարածությունում։ Բերված են օրինակներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов,* Изв. АН СССР. Сер. математика, т. 34, № 1 (1970). [2] *Н. К. Никольский,* Лекции об операторе сдвига, Наука, М., 1980. [3] *В. И. Васюнин,* Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 130 (1977).