ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 1

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

А. Г. Далалян

Об X-свободных гомоморфизмах свободных полугрупп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 13/IX 1983)

1. Пусть X есть слово в алфавите $\Omega_\infty=\{x_1, x_2, \ldots, x_s \ldots\}$. Слово D в алфавите $\Psi_m=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ будем называть словом вида X, если оно получается из слова X подстановкой вместо букв слова X некоторых непустых слов в алфавите Ψ_m, причем вместо одинаковых букв подставляются графически равные слова. Слово X называется исключаемым в алфавите Ψ_m, если в алфавите Ψ_m существует такое сверхслово (или бесконечно много графически неравных слов), которое не содержит (каждое из которых не содержит) подслов вида X (см. ([1])). Слово в алфавите Ω_∞ называется просто исключаемым, если оно исключаемо в некотором алфавите Ψ_m, при $m\geqslant 2$.

Через $\Pi_r=\langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle$ будем обозначать свободную полугруппу с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_r$, где r может принимать значения $1, 2, \ldots, \infty$. Гомоморфизм свободных полугрупп Π_r и Π_t,- взаимно-однозначно отображающий множество всех образующих полугруппы Π_r в множество образующих полугруппы Π_t, будем называть тривиальным. Нетривиальный гомоморфизм полугрупп Π_r и Π_t называется X-свободным, где X есть фиксированное слово в алфавите Ω_∞, если образ каждого не содержащего подслов вида X элемента полугруппы Π_r также не содержит подслов вида X ([1]). В работе ([1]) приводятся достаточные условия того, что гомоморфизм полугрупп Π_r и Π_t является x_1^2 и x_1^n-свободным (при $n\geqslant 3$) и ставится задача о нахождении необходимых и достаточных условий.

Через $|D|$ будем обозначать длину слова D, а через $\asymp$ равенство в свободной полугруппе, или, что то же самое, графическое равенство слов. Следующие теоремы дают ответ на первую часть поставленной задачи.

Теорема 1.1. *Гомоморфизм φ свободных полугрупп* Π_r *и* Π_t *является x_1^2-свободным тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет следующим условиям:*

(*i*) *если $D\in\Pi_r$, $|D|\leqslant 3$ и D не содержит подслов вида x_1^2, то $\varphi(D)$ не содержит подслов вида x_1^2;*

(*ii*) *если при некотором $U\in\Pi_r$ и некоторых образующих a_l и a_k полугруппы Π_r имеют место равенства $\varphi(a_l)\asymp A_1B\varphi(U)CB$ и $\varphi(a_k)\asymp CA_2$ (или $\varphi(a_l)\asymp BC\varphi(U)BA_1$ и $\varphi(a_k)\asymp A_2C$), то a_lUa_k* (соответственно *a_kUa_l*) содержит подслово вида x_1^2.

Пусть $\frac{|\varphi(a_j)|}{|\varphi(a_e)|}$ ограничено, когда a_j и a_e пробегают множество всех образующих полугруппы Π_r и N есть наименьшее целое число, такое, что $\frac{|\varphi(a_j)|}{|\varphi(a_e)|} \leqslant N$.

Теорема 1.2. *Гомоморфизм φ свободных полугрупп Π_r и Π_t является x_1^2-свободным тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

(i') *если $D \in \Pi_r$, $|D| \leqslant N+2$ и D не содержит подслов вида x_1^2, то $\varphi(D)$ не содержит подслов вида x_1^2.*

Теорема 1.3. *Гомоморфизм φ свободных полугрупп Π_3 и Π_t является x_1^2-свободным тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

(i'') *если $D \in \Pi_3$, $|D| \leqslant 4$ и D не содержит подслов вида x_1^2, то $\varphi(D)$ не содержит подслов вида x_1^2.*

Из теоремы 1.1 вытекает.

Следствие 1.4. *Существует алгоритм, который по любому гомоморфизму свободных конечнопорожденных полугрупп определяет, является ли он x_1^2-свободным.*

2. В работе (1) ставится вопрос о существовании для любого исключаемого слова X X-свободного эндоморфизма (т. е. гомоморфизма в себя) некоторой конечнопорожденной свободной полугруппы. Нижеприведенные теорема и следствие дают достаточные условия для несуществования X-свободного гомоморфизма свободных полугрупп Π_r и Π_t при $r, t \leqslant \infty$. Пусть $\{X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}\}$ есть произвольное множество слов в алфавите Ω_∞. Каждой букве x_i, входящей хотя бы в одно из слов указанного множества, сопоставим точку на плоскости (обозначим эту точку через i), причем различным буквам будем сопоставлять различные точки. Две точки i и j соединим ребром тогда и только тогда, когда хотя бы одно из слов $x_i x_j$ и $x_j x_i$ является подсловом одного из слов множества $\{X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}\}$. Полученный граф назовем графом множества слов $\{X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}\}$.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$X \asymp X_1 x_{i_1} X_2 x_{i_2} \ldots X_k x_{i_k} X_{k+1}$$

есть слово в алфавите Ω_∞, где $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ — суть все те буквы, которые входят в слово X ровно один раз. Если

(i) $|X| \geqslant 3k+2$;

(ii) *граф множества слов $\{X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}\}$ не имеет нечетных циклов, то не существует X-свободного гомоморфизма свободных полугрупп Π_r и Π_t при любых $r, t \leqslant \infty$.*

Слово X в алфавите Ω_∞ называется кратным, если каждая буква, входящая в X, входит в него минимум два раза.

Из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.2. *Если X есть кратное слово и для любого представления X в виде*

$$X \asymp Y_1 x_i Y_2 x_i Y_3$$

длина Y_2 нечетна, то не существует X-свободного гомоморфизма свободных полугрупп Π_r и Π_t при любых r, $t \leqslant \infty$.

Следующие примеры слов, удовлетворяющие условию следствия 2.2, дают отрицательный ответ на поставленный выше вопрос не только для эндоморфизма конечнопорожденных свободных полугрупп, но и для гомоморфизма произвольных свободных полугрупп Π_r и Π_t при r, $t \leqslant \infty$.

а. При любом натуральном $n \geqslant 2$ слово

$$W_n \asymp x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n$$

является кратным и, как ранее доказано автором, исключаемо в алфавите Ψ_4.

б. При любом натуральном n слово

$$V_{2n} \asymp x_1 x_2 \ldots x_{2n-1} x_{2n} x_{2s_1-1} x_{2l_1} \ldots x_{2s_n-1} x_{2l_n},$$

где $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ и $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ есть перестановка множества $(1, 2, \ldots, n)$, является кратным и исключаемо в алфавите Ψ_4.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Հ. ԴԱԼԱԼՅԱՆ

Ազատ կիսախմբերի X-ազատ հոմոմորֆիզմների մասին

Դիցուք, X-ը $\Omega=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ հաշվելի այբուբենի բառ է, A բառը $\Psi_m=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ այբուբենում կոչվում է X տեսքի բառ, եթե այն ստացվում է X բառի տառերը Ψ_m այբուբենի որոշ ոչ դատարկ բառերով փոխարինելով, ընդ որում միանման տառերը փոխարինվում են հավասար բառերով։ X բառը կոչվում է բացառելի, եթե գոյություն ունի Ψ_m այբուբեն, որում կա տարբեր բառերի այնպիսի անվերջ բազմություն, որոնցից յուրաքանչյուրը չի պարունակում իր մեջ X տեսքի ենթաբառեր։ Ազատ կիսախմբերի հոմոմորֆիզմը կոչվում է X-ազատ, եթե X տեսքի ենթաբառեր չպարունակող Π կիսախմբի յուրաքանչյուր տարրի պատկերը նույնպես չի պարունակում X տեսքի ենթաբառեր։ Այս աշխատանքի մեջ բերվում են ազատ կիսախմբերի հոմոմորֆիզմը x_1^2-ազատ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, ինչպես նաև բազմություններ բացառելի X բառերի, որոնցից յուրաքանչյուրի համար ոչ մի ազատ կիսախմբերի X-ազատ հոմոմորֆիզմ գոյություն չունի։

Այս պնդումները պատասխանում են ([1])-ում արծարծված հարցերին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D. R. Bean, A. Ehrenfeucht, G. F. McNulty*, Pacific Journal of Mathematics, v. 85, № 2 (1979).