ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 1

УДК 517.547

МАТЕМАТИКА

Е. Я. Меламуд

Теорема Каратеодори и граничная интерполяционная задача Неванлинны для аналитической J-нерастягивающей матрицы-функции

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 27/VI 1983)

1. Пусть J—$(m\times m)$-матрица, для которой $J^*=J$, $J^2=I$. Обозначим через S_J класс аналитических матриц-функций $w(\lambda)$, J-нерастягивающих в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>0(J-w^*(\lambda)Jw(\lambda)\geqslant 0)$. Решается следующая интерполяционная задача. Даны n точек на мнимой оси $i\omega_k(k=1,\ldots,n;\ \omega_k\neq\omega_j$ при $k\neq j)$ и $2n$ $(m\times m)$-матриц w_k, L_k, удовлетворяющих условиям

$$w_k^*Jw_k=J,\quad L_k\geqslant 0\quad (k=1,\ldots,n). \tag{1}$$

Требуется найти необходимое и достаточное условие существования матрицы-функции $w(\lambda)$ класса S_J, для которой

$$\lim_{\lambda\to i\omega_k} w(\lambda)=w_k,\quad \lim_{\lambda\to i\omega_k}\frac{J-w^*(\lambda)Jw(\lambda)}{\bar\lambda+\lambda}\leqslant L_k, \tag{2}$$

когда $\lambda\to i\omega_k$ по любому некасательному пути, и в случае его выполнения дать полное описание всех решений (в дальнейшем называем ее задачей (1)—(2)).

Такая задача в скалярном случае для голоморфных сжимающих функций ($m=1$, $J=1$) была решена Р. Неванлинной ([1]). В случае $m>1$ интерполяционные задачи с узлами интерполяции внутри области (задачи Неванлинны—Пика, Шура, Каратеодори и др.) изучались многими авторами ([2-8]). Однако граничная интерполяционная задача Неванлинны в многомерном случае в такой постановке не рассматривалась. При дополнительном ограничении регулярности $w(\lambda)$ в узлах интерполяции решение этой задачи докладывалось автором на конференции «J-теория В. П. Потапова и связанные с нею вопросы» (апрель 1981 г.).

Отметим, что J-нерастягивающие матрицы-функции играют важную роль в теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, в теории электрических цепей и во многих других вопросах (характеристическая матрица-функция несамосопряженного оператора, резольвентная матрица эрмитова оператора, проходная матрица-функция пассивного многополюсника и др.). Более полное представление о приложениях можно найти в обзоре ([7]).

В связи с тем, что узлы интерполяции в задаче (1)—(2) находятся на границе области, нам понадобилось доказать для матриц-функций класса S_J теорему, аналогичную известной теореме Каратеодори

([1]). Это позволило, используя матричный аналог леммы Жюлиа ([1]), выяснить вопрос о критерии разрешимости задачи (1)—(2) и, опираясь на идеи из работ ([2,9]), дать описание множества ее решений в неопределенном случае.

2. Аналог теоремы Каратеодори*.

Пусть $w(\lambda)$—*матрица-функция класса* S_J, w_0—*постоянная* J-*унитарная матрица,* $i\omega_0$—*произвольная точка мнимой оси. Тогда либо* $\frac{\|J-w_0^*Jw(\sigma+i\omega_0)\|}{\sigma}\to\infty$ *при* $\sigma\to+0$, *либо при* $\lambda\to i\omega_0$ *по любому некасательному пути* ($\mathrm{Re}\,\lambda>0$) *существует конечный предел*

$$\lim_{\lambda\to i\omega_0}\frac{J-w_0^*Jw(\lambda)}{\lambda-i\omega_0}=M\geqslant 0$$

и при этом также

$$\lim_{\lambda\to i\omega_0}\frac{J-w^*(\lambda)Jw(\lambda)}{\bar\lambda+\lambda}=M.$$

Доказательство. Если $\frac{\|J-w_0^*Jw(\sigma+i\omega_0)\|}{\sigma}\not\to\infty$ при $\sigma\to+0$, то для некоторой последовательности $\lambda_n=\sigma_n+i\omega_0$ существует $\lim\limits_{\sigma_n\to+0}\frac{J-w_0^*Jw(\lambda_n)}{\sigma_n}\overset{\mathrm{def}}{=}M$, откуда следуют равенства

$$\lim_{\sigma_n\to+0}w(\lambda_n)=w_0;\quad \lim_{\sigma_n\to+0}\frac{J-w^*(\lambda_n)Jw(\lambda_n)}{2\sigma_n}=\mathrm{Re}\,M\geqslant 0.$$

Записав для $w(\lambda)$ неравенство Шварца—Пика ([10]) для точек λ_n и λ и перейдя к пределу при $\sigma_n\to+0$, получим аналог неравенства Жюлиа ([1]):

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,M & \dfrac{J-w_0^*Jw(\lambda)}{\lambda-i\omega_0}\\ \dfrac{J-w^*(\lambda)Jw_0}{\bar\lambda-\overline{i\omega_0}} & \dfrac{J-w^*(\lambda)Jw(\lambda)}{\bar\lambda+\lambda}\end{pmatrix}\geqslant 0.$$

Полагая $P(\lambda)=J[w_0-w(\lambda)][w_0+w(\lambda)]^{-1}$, приходим к неравенству

$$\begin{pmatrix}\Lambda & \dfrac{P(\lambda)}{\lambda-i\omega_0}\\ \dfrac{P_0^*(\lambda)}{\bar\lambda-\overline{i\omega_0}} & \dfrac{\mathrm{Re}\,P(\lambda)}{\bar\lambda+\lambda}\end{pmatrix}\geqslant 0,\quad \Lambda=Jw_0J(\mathrm{Re}\,M)Jw_0^*J. \tag{3}$$

Из (3) видно, что блоки $\frac{\mathrm{Re}\,P(\lambda)}{\bar\lambda+\lambda}$ и $\frac{P(\lambda)}{\lambda-i\omega_0}$ ограничены внутри любого угла $-\frac{\pi}{2}+\delta<\arg(\lambda-i\omega_0)<\frac{\pi}{2}-\delta$, ($\delta>0$), и $\lim\limits_{\lambda\to i\omega_0}P(\lambda)=0$.

Обозначив $p_f(\lambda)=f^*P(\lambda)f$ (f—произвольный вектор из $\mathbf{C}^m$), получим для скалярной позитивной функции $p_f(\lambda)$ неравенство

* Стимулом к установлению этой теоремы была беседа с И. В. Ковалишиной.

$$\begin{pmatrix} f^*\Lambda f & \dfrac{p_f(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} \\ \dfrac{\overline{p_f(\lambda)}}{\bar{\lambda} - \overline{i\omega_0}} & \dfrac{\operatorname{Re} p_f(\lambda)}{\bar{\lambda}+\lambda} \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Рассмотрим функцию $s(\lambda) = \dfrac{1-p_f(\lambda)}{1+p_f(\lambda)}$. Очевидно, $|s(\lambda)| \leqslant 1$ ($\operatorname{Re}\lambda > 0$) и $\lim\limits_{\lambda \to i\omega_0} s(\lambda) = 1$. Применяя к $s(\lambda)$ скалярную теорему Каратеодори ([1]), получим, что при $\lambda \to i\omega_0$ по любому некасательному пути существует предел $\lim\limits_{\lambda \to i\omega_0} \dfrac{1-s(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} = l$, $0 \leqslant l \leqslant \infty$. Из ограниченности $\dfrac{p_f(\lambda)}{\lambda - i\omega_0}$ и равенства $\dfrac{1-s(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} = \dfrac{p_f(\lambda)}{\lambda - i\omega_0}(1+s(\lambda))$ видно, что $l < \infty$. Таким образом, для $\forall f \in C^m$ существует $\lim\limits_{\lambda \to i\omega_0} \dfrac{f^* P(\lambda) f}{\lambda - i\omega_0} \geqslant 0$. Переходя от квадратичных форм к билинейным, убеждаемся в существовании конечного предела

$$\lim_{\lambda \to i\omega_0} \frac{P(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} \overset{\mathrm{def}}{=} T \geqslant 0.$$

Возвращаясь к $W(\lambda) = [J+P(\lambda)]^{-1}[J-P(\lambda)]\, W_0$, заключаем, что существуют пределы

$$\lim_{\lambda \to i\omega_0} W(\lambda) = W_0, \quad \lim_{\lambda \to i\omega_0} \frac{J - W_0^* J W(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} = 2 W_0^* T W_0 (= M) \geqslant 0.$$

Наконец, из равенства

$$\frac{J - W^*(\lambda) J W(\lambda)}{\bar{\lambda}+\lambda} - M = \frac{\lambda - i\omega_0}{\bar{\lambda}+\lambda}\left[W^*(\lambda) J W_0 J \frac{J - W_0^* J W(\lambda)}{\lambda - i\omega_0} - M \right] +$$
$$+ \frac{\bar{\lambda} - \overline{i\omega_0}}{\bar{\lambda}+\lambda}\left[\frac{J - W^*(\lambda) J W_0}{\bar{\lambda} - \overline{i\omega_0}} - M \right]$$

получаем, что $\lim\limits_{\lambda \to i\omega_0} \dfrac{J - W^*(\lambda) J W(\lambda)}{\bar{\lambda}+\lambda} = M$.

Прямым следствием обобщенной теоремы Каратеодори является

Теорема (об „отталкивании“ полюсов и „нулей“ от мнимой оси).* *Пусть* $W(\lambda) \in S_J$ *и* $\lim\limits_{\sigma \to +0} \dfrac{\|J - W_0^* J W(\sigma + i\omega_0)\|}{\sigma} \neq \infty$, $(W_0^* J W_0 = J)$. *Положим* $K = \lim\limits_{\lambda \to i\omega_0} \dfrac{W^*(\lambda) J W(\lambda) - J}{\bar{\lambda}+\lambda} J$. *Тогда полюсы матриц-функций* $W(\lambda)$ *и* $W^{-1}(\lambda)$ *расположены соответственно вне кругов* $m_\pm |\lambda - i\omega_0|^2 < 2\operatorname{Re}\lambda$, *где* $m_\pm = \max\{0, k_\pm\}$, *причем* $k_+(k_-)$ *— наибольшее собственное число матрицы* $K(-K)$. *Эти оценки неулучшаемы.*

3. Решение интерполяционной задачи (1)—(2).

Введем обозначения: $I = I_m$, $\Omega = \operatorname{diag}(i\omega_1 I, \ldots, i\omega_n I)$, $R_\lambda = (\Omega - \lambda I)^{-1}$, $\mathscr{C} = \operatorname{col}(I, \ldots, I)$, $\mathscr{G} = \operatorname{col}(W_1, \ldots, W_n)$,

---

* Теорема об „отталкивании“ полюсов от точек голоморфности для $W(\lambda) \in S_J$ впервые установлена в ([5]).

$$\widetilde{L}_k = w_k J L_k J w_k^*, \quad J_2 = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} \widetilde{L}_1 & \frac{J - w_1 J w_2^*}{i\omega_1 + \overline{i\omega_2}} & \cdots & \frac{J - w_1 J w_n^*}{i\omega_1 + \overline{i\omega_n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{J - w_n J w_1^*}{i\omega_n + \overline{i\omega_1}} & & \cdots & \widetilde{L}_n \end{pmatrix}$$

Теорема 1. *Для того чтобы аналитическая матрица-функция $w(\lambda)$ была решением интерполяционной задачи* (1)—(2), *необходимо и достаточно, чтобы она была решением основного матричного неравенства задачи* (ОМН)

$$\begin{pmatrix} W & R_\lambda[-\mathscr{C}, \mathscr{G}] \begin{bmatrix} w(\lambda) \\ I \end{bmatrix} \\ [w^*(\lambda), I] \begin{bmatrix} -\mathscr{C} \\ \mathscr{G}^* \end{bmatrix} R_\lambda^* & [w^*(\lambda), I] \frac{J_2}{\overline{\lambda}+\lambda} \begin{bmatrix} w(\lambda) \\ I \end{bmatrix} \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Теорема 2. *Для того чтобы* ОМН *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы информационный блок W был неотрицательным.*

Теорема 3. *Если $W>0$, то задача* (1)—(2) *имеет бесчисленное множество решений; любое решение $w(\lambda)$ представимо в виде дробно-линейного преобразования*

$$w(\lambda) = [a(\lambda)p(\lambda) + b(\lambda)q(\lambda)][c(\lambda)p(\lambda) + d(\lambda)q(\lambda)]^{-1}, \tag{4}$$

где матрица коэффициентов $\mathcal{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ *определяется формулой*

$$\mathcal{A}(\lambda) = I + J_2 \begin{bmatrix} -\mathscr{C}^* \\ \mathscr{G}^* \end{bmatrix} R_{-\overline{\lambda}}^* W^{-1} \quad [-\mathscr{C}, \mathscr{G}]$$

и является групповой элементарной ([10]) *J_2-растягивающей при* $\mathrm{Re}\lambda>0$, *с полюсами в узлах интерполяции, а параметр* $\mathrm{col}\,[p(\lambda), q(\lambda)]$ *—произвольная J-нерастягивающая неособенная* ([5]) *пара мероморфных матриц-функций.*

Пусть блок $W \geqslant 0$—вырожденный. Если $W=0$, то задача (1)—(2) имеет единственное решение $w(\lambda) = w_1$, причем $w_k = w_1$ ($k=2, 3, \ldots, n$). Пусть $W \neq 0$. Представим W в виде $W = T^* \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T$, где $T^*T = I$ $W_{11}>0$ и разобьем на соответствующие блоки матрицы $T\mathscr{C} = \begin{pmatrix} \mathscr{C}_1 \\ \mathscr{C}_2 \end{pmatrix}$, $T\mathscr{G} = \begin{pmatrix} \mathscr{G}_1 \\ \mathscr{G}_2 \end{pmatrix}$, $T\Omega T^* = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

Теорема 4. *Если блок $W \geqslant 0$ вырожден* ($W \neq 0$), *то общее решение задачи* (1)—(2) *представимо в виде* (4), *где матрица коэффициентов определяется формулой*

$$\mathcal{A}(\lambda) = I + J_2 \begin{bmatrix} -\mathscr{C}_1^* \\ \mathscr{G}_1^* \end{bmatrix} (\Omega_{11}^* + \lambda I)^{-1} \; W_{11}^{-1} [-\mathscr{C}_1, \mathscr{G}_1],$$

а параметр $\mathrm{col}[p(\lambda), q(\lambda)]$*—произвольная J-нерастягивающая нео-*

собенная пара мероморфных матриц-функций, удовлетворяющая условию

$$\mathscr{C}_2 p(\lambda) - \mathscr{G}_2 q(\lambda) \equiv 0.$$

Отметим, что близкие результаты при решении скалярной многоточечной проблемы моментов получены в ([11]).

В заключение выражаю искреннюю признательность М. Г. Крейну за внимание к этой работе.

Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Ե. ՅԱ. ՄԵԼԱՄՈՒԴ

Կարաթեոդորիի թեորեմը և Նևանլիննայի եզրային ինտերպոլյացիոն խնդիրը J չձգող մատրից-ֆունկցիաների համար

Ապացուցվում է սկալյար ֆունկցիաների համար Կարաթեոդորիի անկյունային ածանցյալի մասին հայտնի թեորեմի անալոգը S_J դասի ($w(\lambda)$ անալիտիկ մատրից-ֆունկցիաների դաս, որոնք $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ կիսահարթության մեջ բավարարում են $J-w^*(\lambda)Jw(\lambda)\geqslant 0$ $J^*=J$, $J^2=I$) ֆունկցիաների համար։ Ապացուցված է նաև թեորեմ բևեռների և զրոների եզրից »չշեղվելու« մասին։

Լուծված է S_J դասի ֆունկցիայի վերականգնման խնդիրը վերջավոր թվով կետերում տված նրա անկյունային եզրային արժեքներով և անկյունային ածանցյալների մաժորանտներով։

Ստացված է խնդրի լուծելիության հայտանիշ և նրա բավարարման դեպքում նկարագրված են բոլոր լուծումները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. Nevanlinna*, Ann. Acad. Soc., A32, 1—75, 1929. [2] *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов*, ДАН АрмССР, т. 59, № 1 (1974). [3] *И. В. Ковалишина*, ДАН АрмССР, т. 59, № 3 (1974). [4] *И. П. Федчина*, ДАН АрмССР, т. 61, №4 (1975). [5] *Т. С. Иванченко*, ДАН УССР, А, № 5 (1980). [6] *M. Rosenblum, J. Rovnjak*, Integral equations and operator theory, v. 5, p. 870—887 (1982). [7] *J. W. Helton*, Bulltin of the Amer. Math. Soc., v. 7, №1, (1982). [8] *J. A. Ball, J. W. Helton*, J. Operator theory, v. 9, №1 (1983). [9] *А. А. Нудельман*, ДАН СССР, т. 233, №5 (1977). [10] *А. В. Ефимов, В. П. Потапов*, УМН, т. 28, вып. 1 (169) (1973). [11] *А. А. Нудельман, А. В. Тулуб*, Теор. и мат. физика, т. 39, №3 (1979).