ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXX 1985 1

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

К. Г. Казарян

О свойстве устойчивости базисности для систем функций типа Миттаг-Леффлера

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 31/VIII 1984)

1. В исследованиях М. М. Джрбашяна (до 1965 г.), подытоженных в его монографии ([1]), была создана теория гармонического анализа в комплексной области. Это теория прямых и обратных преобразований с ядрами, порожденнными целой функцией типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n/\rho)}\ (\rho>0,\ \mu>0), \tag{1}$$

на произвольной конечной системе лучей, исходящих из точки $z=0$ комплексной плоскости. Им были установлены существенно новые результаты типа теорем Планшереля и Винера—Пэли.

В последние годы М. М. Джрбашяном и его учениками развивается новое направление дискретного гармонического анализа—дискретного аналога упомянутой выше теории гармонического анализа в комплексной области. Эти два направления внутренне столь же тесно и гармонично связаны, как и теории преобразований и рядов Фурье.

В работах М. М. Джрбашяна ([2,3]) были построены системы функций типа Миттаг-Леффлера, которые являются полными системами собственных и присоединенных векторов, по существу, совершенно нестандартной краевой задачи для определенных интегро-дифференциальных операторов дробного порядка. Им были установлены теоремы о базисности таких систем—теоремы о разложениях по собственным и присоединенным функциям таких операторов.

Данная работа связана с разложениями по таким системам типа Миттаг-Леффлера, ассоциированным с нулями $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ целой функции $S_\nu(\sigma z)$ $(0\leqslant\nu<2,\ \sigma>0)$, экспоненциального типа σ, где

$$S_\nu(z)=zE_{1/2}(-z^2;\ 1+\nu)\equiv\frac{1}{2i}\{E_1(iz;\ \nu)-E_1(-iz;\ \nu)\}. \tag{2}$$

Исчерпывающая информация об асимптотическом поведении нулей этой функции дается следующими леммами, установленными в работе М. М. Джрбашяна ([3]) (см. леммы 1.1 и 1.5).

Лемма А. 1. *При $\sigma>0$ и для значений параметра*

$$0\leqslant\nu<2 \tag{3}$$

функция $S_\nu(\sigma z)$ *имеет только вещественные и простые нули* $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, *причем*

$$x_0=0,\ x_{-k}=-x_k(-1\leqslant k<+\infty). \tag{4}$$

2. *При* $0<\nu<1$

$$x_k\in\left(\frac{\pi}{\sigma}k-\frac{\pi}{2\sigma},\ \frac{\pi}{\sigma}k+\frac{\pi}{2\sigma}\right)\ (-\infty<k<+\infty), \tag{5}$$

а при $\nu=0$

$$x_0=0,\ x_k=\frac{\pi}{\sigma}k-\frac{\pi}{2\sigma}\operatorname{sign}k\ (k=\pm1,\pm2,\ldots). \tag{6}$$

3. *При* $1<\nu<2$

$$x_0=,\ x_k=\begin{cases}\left(\frac{\pi}{\sigma}k,\ \frac{\pi}{\sigma}(k+1)\right)\ (k=1,2,\ldots),\\ \left(\frac{\pi}{\sigma}(k-1),\ \frac{\pi}{\sigma}k\right)\ (k=-1,-2,\ldots),\end{cases} \tag{7}$$

а при $\nu=1$

$$x_k=\frac{\pi}{\sigma}k\ (-\infty<k<+\infty). \tag{8}$$

Лемма Б. *При* $0<\nu<1$ *или при* $1<\nu<2$ *справедлива асимптотическая формула*

$$x_k=\frac{\pi}{\sigma}k+\frac{\pi}{2\sigma}(\nu-1)\operatorname{sign}k+O(|k|)^{\nu-2}),\ |k|\to+\infty. \tag{9}$$

Имеет место следующая теорема, которая является специальным случаем более общей теоремы 5 из работы С. Г. Рафаеляна [4].

Теорема А. *Пусть* $-1<\omega<1$ *и* $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — *последовательность нулей функции* $S_\nu(\sigma z)$, *где* $\sigma>0$ *и* $\nu=1+\frac{\omega}{2}$. *Тогда система функций*

$$\{(1+|x_k|)^{\omega/2}E_1(ix_kt;\nu)\}_{-\infty}^{+\infty} \tag{10}$$

является базисом Рисса пространства $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)\equiv L^2((-\sigma,\sigma);\ |t|^\omega dt)$.

Напомним, что базис $\{e_k\}$ гильбертова пространства H называется базисом Рисса, если для каждого $x\in H$, $x=\sum a_ke_k$, выполняются неравенства $c\sum|a_k|^2\leqslant\|x\|^2\leqslant C\sum|a_k|^2$, где c, $C\in(0,+\infty)$ — константы, не зависящие от x.

Заметим, что когда $\omega=0$ ($\nu=1$), то, с учетом равенств (8) и тождества $E_1(z;1)=\exp z$, эта теорема переходит в известное утверждение о том, что *система функций* $\left\{\exp\left(i\pi\frac{k}{\sigma}t\right)\right\}_{-\infty}^{+\infty}$ *является ортонормальным базисом пространства* $L^2(-\sigma,\sigma)$.

Базисные свойства системы $\{\exp(i\lambda_kt)\}_{-\infty}^{+\infty}$, где λ_k — комплексные числа, были рассмотрены впервые Н. Винером и Р. Пэли [5] и изучались затем в ряде работ. В работах [5-8] на последовательность $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ накладывались условия геометрической близости к целым точким. Наиболее сильным в этом направлении является следующий результат М. И. Кадеца ([8]).

Теорема Б. *Если числа* δ_k *таковы, что*

$$\sup_{-\infty<k<+\infty} |\operatorname{Im}\delta_k| < +\infty, \quad |\operatorname{Re}\delta_k| \leqslant d \ (-\infty<k<+\infty), \tag{11}$$

где $d<1/4$, *то система* $\{\exp(i(k+\delta_k)t)\}_{-\infty}^{+\infty}$ *является базисом Рисса в* $L^2(-\pi, \pi)$.

Отметим, что второе из условий (11), т. е. $\sup\limits_k |\operatorname{Re}\delta_k|<1/4$, вообще говоря, уже нельзя ослабить, так как система $\{\exp[i\times(k+\theta\operatorname{sign} k)t]\}_{-\infty}^{+\infty}$ при $\theta>1/4$ не полна, а при $\theta\leqslant -1/4$ не минимальна (см. ([9]), с. 48 и ([10]), с. 37).

Сформулируем теперь основной результат данной работы, который является обобщением теоремы Б на системы вида $\{c_k E_1(i\times(x_k+\delta_k)t; \nu)\}_{-\infty}^{+\infty}$.

Теорема 1. *Пусть* $-1<\omega<1$, $\sigma>0$ *и* $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — *последовательность нулей целой функции* $S_\nu(\sigma z)$, *где* $\nu=1+\frac{\omega}{2}$. *Если числа* δ_k *таковы, что*

$$\sup_{-\infty<k<+\infty} |\operatorname{Im}\delta_k| < +\infty, \quad |\operatorname{Re}\delta_k| \leqslant d\cdot\rho_k (-\infty<k<+\infty), \tag{12}$$

где $d<1/4$ *и*

$$\rho_k = \inf\{|x_k - x_j| : j\neq k, \ -\infty<j<+\infty\} \ (-\infty<k<+\infty), \tag{13}$$

то система

$$\{(1+|x_k+\delta_k|)^{\omega/2} E_1(i(x_k+\delta_k)t; \nu)\}_{-\infty}^{+\infty} \tag{14}$$

является базисом Рисса пространства $L^{2,\omega}(-\sigma, \sigma)$.

Таким образом, системы вида (10) так же, как и системы вида $\{\text{екр}(ikt)\}_{-\infty}^{+\infty}$, обладают свойством устойчивости базисности.

Отметим, что когда $\omega=0$ (тогда $\nu=1$) и $\sigma=\pi$, из (8) следует, что $x_k=k(-\infty<k<+\infty)$, так что в этом случае $\rho_k=1$ $(-\infty<k<+\infty)$. Отсюда и из тождества $E_1(z; 1)=\exp z$ следует, что при $\omega=0$ (и при $\sigma=\pi$) теорема 1 переходит в теорему Б М. И. Кадеца.

Отметим, наконец, что нам не удалось построить соответствующего примера, как в теореме Б, и показать, что в нашей теореме 1 при $\omega\neq 0$ условие $d<1/4$ также является точным.

Приношу глубокую благодарность моему научному руководителю профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство при выполнении данной работы.

Ереванский государственный университет

Կ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների համակարգերի բազիսության կայունության հատկության վերաբերյալ

Հայտնի է, որ $\{\exp(ikt)\}_{-\infty}^{+\infty}$ համակարգը ունի բազիսության կայունության որոշակի հատկություն, որը կայանում է հետևյալում՝ եթե δ_k կոմպլեքս թվերն այնպիսին են, որ $\sup|\mathrm{Im}\,\delta_k|<+\infty$ և $|\mathrm{Re}\,\delta_k|\leqslant d$, ապա $d<1/4$ դեպքում $\{\exp[i(x_k+\delta_k)t]\}_{-\infty}^{+\infty}$ համակարգը Ռիսի բազիս է $L^2(-\pi,\pi)$-ում։

Ներկա աշխատանքում բերվում է պնդում այն մասին, որ այդպիսի հատկությամբ օժտված են նաև $E_1(z;\mu)$ ֆունկցիայով ծնված որոշակի համակարգեր։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [2] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 261, № 5 (1981). [3] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 19, № 2 (1984). [4] *С. Г. Рафаелян*, ДАН АрмССР, т. 70, № 4 (1980). [5] *Н. Винер, Р. Пэли*, Преобразование Фурье в комплексной области, Наука, М., 1964. [6] *R. I. Duffin, A. C. Schaeffer*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 72, № 2 (1952). [7] *В. Д. Головин*, ДАН АрмССР, т. 36, № 2 (1963). [8] *М. И. Кадец*, ДАН СССР, т. 155, № 6 (1964). [9] *N. Levinson*, Gap and density theorems, New York, Amer. Mat. Soc. coll. Publications, 1940. [10] *В. Э. Кацнельсон*, Функц. анализ и его приложения, т. 5, вып. 1 (1971).