ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXX 1985 1

УДК 517.52

МАТЕМАТИКА

Г. М. Мушегян

О регулярности методов суммирования в F-пространствах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 3/VI 1983)

Напомним некоторые факты. Пусть X линейное метрическое пространство над числовым полем Φ, а $T=(c_{m,n})_{m=0,}^{\infty}{}_{n=0}^{\infty}$ числовая матрица, где $c_{m,n}\in\Phi$. Говорят, что последовательность $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, $s_n\in X$, методом T суммируется к s, $s\in X$, если выполняются следующие условия:

1) для произвольного числа m, $0\leqslant m<+\infty$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{m,n}s_n$ в метрике пространства X сходится к некоторому элементу $t_m(s_n)$, $t_m(s_n)\in X$;

2) последовательность $t_m(s_n)$ сходится к s при $m\to+\infty$.

Метод T называется регулярным в X, если любая сходящаяся к s, $s\in X$, последовательность $\{s_n\}$, $\{s_n\}\subset X$, методом T суммируется к тому же s.

Если X пространство Банаха, то для него справедливо обобщение теоремы Теплица (см. [1]), т. е. имеет место следующая

Теорема 1. *Для регулярности метода T в банаховом пространстве X необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_{m,n}|<H$, *где H не зависит от m*, $0\leqslant m<+\infty$;

2) $\lim\limits_{m\to\infty} c_{m,n}=0$ для произвольного фиксированного n, $0\leqslant n<+\infty$;

3) $G_m=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\to 1$ при $m\to\infty$.

Хорошо известно также, что если X F-пространство (например, пространство измеримых функций), то теорема 1 уже не верна.

В настоящей работе доказываются следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть X произвольное F-пространство, тогда для регулярности метода $T=(c_{m,n})_{m=0,}^{\infty}{}_{n=0}^{\infty}$ достаточно выполнения следующих условий:*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_{m,n}|<H$, *где H не зависит от m*, $0\leqslant m<+\infty$;

2) $\lim\limits_{m\to\infty} c_{m,n}=0$ *для любого фиксированного n*;

3) $G_m=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\to 1$ при $m\to\infty$;

4) *существует* $q>0$ *такое, что* $l_m<q$, $0\leqslant m<+\infty$, *где* l_m *чис*
ло всех тех индексов n, *для которых* $c_{m,n}\neq 0$.

Через Ω обозначим F-пространство определенных на $[0, 1]$ из
меримых, почти всюду конечных функций с метрикой

$$\rho(f, g)=\int_0^1 \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\,d\mu;$$

тогда справедлива следующая

Теорема 3. *Для регулярности метода* T *в* Ω *условия* 1)—4
теоремы 2 *являются необходимыми, достаточными.*

Далее приводятся необходимые и достаточные условия для ре
гулярности метода T в пространстве L_p, $0<p<1$, с метрикой

$$\rho(f, g)=\int_0^1 |f(t)-g(t)|^p d\mu.$$

А именно, доказывается следующая

Теорема 4. *Для того чтобы метод* T *был регулярен в* L_p
$0<p<1$, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_{m,n}|^p<H$, *где* H *не зависит от* m, $0\leqslant m<+\infty$;

2) $\lim\limits_{m\to\infty} c_{m,n}=0$ *для любого фиксированного* n, $0\leqslant n<+\infty$;

3) $G_m=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\to 1$ *при* $m\to+\infty$.

Кроме самостоятельного интереса теоремы 3 и 4 дополняют тео
рему 2. Из теоремы 3 следует, что условия 1)—4) в формулировке те
оремы 2 нельзя ослабить, а из теоремы 4 следует существование неба
нахового F-пространства, для которого условие 4) теоремы 2 не яв
ляется необходимым.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\{x_n\}\in X$, $x_0\in X$ и $x_n\to x$
Для произвольного m, $0\leqslant m<+\infty$ условие 4) обеспечивает сходи
мость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{m,n}x_n$. Так как $|c_{m,n}|<H$, то при произвольном $x\in$
множество $\{R_{m,n}(x)=c_{m,n}x : 0\leqslant m, n<+\infty\}$ ограничено, следовательно
$R_{m,n}(x)\to 0$ $(x\to 0)$ равномерно относительно m и n (см. ([2]), с. 64, тео
рема II). Следовательно, для произвольного ε, $\varepsilon>0$, существует та
кое δ, $\delta>0$, что для любого m и n $\|c_{m,n}x\|<\frac{\varepsilon}{3q}$ как только $\|x\|<$
Отсюда, выбирая N так, чтобы $\|x_n-x_0\|<\delta$, при $n>N$ и использу
условие 4), для произвольного m будем иметь

$$\left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} c_{m,n}(x_n-x_0)\right\|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\|c_{m,n}(x_n-x_0)\right\|<\frac{q\varepsilon}{3q}=\frac{\varepsilon}{3}. \quad (1$$

Далее, используя непрерывность относительно α оператора αx, из ус
ловий 2) и 3) можно указать число M такое, что при $m>M$ имел
место неравенства

$$\sum_{n=0}^{N}\|c_{m,n}(x_n-x_0)\|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}-1\right)x_0\right\|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Отсюда при $m>M$ будем иметь

$$\|t_m(x_n)-x_0\|=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}x_n-\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}x_0+\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}x_0-x_0\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{N}\|c_{m,n}(x_n-x_0)\|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\|c_{m,n}(x_n-x_0)\|+\left\|\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}x_0-x_0\right\|<\varepsilon.$$

Откуда $\lim\limits_{m\to\infty}t_m(x_n)=x_0$, что требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3. Достаточность сразу следует из теоремы 2. Легко доказать необходимость условий 1)—3) теоремы 3. Остается установить необходимость условия 4). Предположим, что регулярный в Ω метод T не удовлетворяет условию 4). Тогда возможны два случая:

а) существует такое m_0, что множество $\{n: c_{m_0,n}\neq 0\}$ бесконечно;

б) для каждого m множество $\{n: c_{m,n}\neq 0\}$ имеет конечную мощность l_m, но множество $\{l_m\}_{m=0}^{\infty}$ не ограничено.

В случае а) пусть $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}=\{n: c_{m_0,n}\neq 0\}$. Обозначим $k_r=r(r+1)/2$, $r=0, 1, \ldots$. Положим $\tau_i=i-k_r$, при $k_r<i\leqslant k_{r+1}$ и

$$f_{n_i}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c_{m_0,n}}, & \text{при } x\in\left(\dfrac{\tau_i-1}{r+1}, \dfrac{\tau_i}{r+1}\right)\\ 0, & \text{при } x\notin\left(\dfrac{\tau_i-1}{r+1}, \dfrac{\tau_i}{r+1}\right)\end{cases}.$$

Положим $f_n(x)=0$ на $[0, 1]$, при $n\notin\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$. Последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю, но

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_{m_0,n}f_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{i=k_r+1}^{k_{r+1}}c_{m_0,n_i}f_{n_i}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}1=+\infty.$$

В случае б) можно предположить, что $l_m\to\infty$ при $m\to\infty$. Допустим, уже построены числа $n_1<n_2<\ldots<n_r$; $m_1<m_2<\ldots<m_r$ и ограниченные функции $f_0(x), \ldots, f_{n_r}(x)$. Обозначим $p_r=\max\{n: c_{m,n}\neq 0, m\leqslant m_r\}$. Используя условия 2) и б), можно выбрать m_{r+1} так, чтобы

$$l_{m_{r+1}}-p_r>r+1, \quad \left|\sum_{n=0}^{n_r}c_{m_{r+1},n}f_n(x)\right|<\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad x\in[0, 1].$$

Пусть $n_{r+1}^{(1)}<n_{r+1}^{(2)}<\ldots<n_{r+1}^{(r+1)}$ наименьшие числа, для которых $c_{m_{r+1}, n_{r+1}^{(i)}}\neq 0$ и $n_{r+1}^{(i)}>p_r$ при $1\leqslant i\leqslant r+1$. Обозначим $n_{r+1}=n_{r+1}^{(r+1)}$ и положим $f_n(x)=0$ на $[0, 1]$ при $n\notin\{n_{r+1}^{(1)}, \ldots, n_{r+1}^{(r+1)}\}\cap\{n: n_r<n\leqslant n_{r+1}\}$, а при $n=n_{r+1}^{(i)}$, $1\leqslant i\leqslant r+1$ $f_n(x)=1/c_{m_{r+1}, n_{r+1}^{(i)}}$ при $x\in\left(\dfrac{i-1}{r+1}, \dfrac{i}{r+1}\right)$ и $f_n(x)=0$ при $x\notin\left(\dfrac{i-1}{r+1}, \dfrac{i}{r+1}\right)$.

Ясно, что $f_n(x)\to 0$ по мере, при $n\to\infty$, но

$$t_{m_r}\{f_n\} \geqslant \sum_{n=n_r+1}^{n_{r+1}} c_{m_r,n} f_n(x) - \left|\sum_{n=0}^{n_r} c_{m,n} f_n(x)\right| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает выполнение условия 4).

Доказательство теоремы 4. Достаточность легко установить. Необходимость. Пусть метод T регулярен в L_p. Легко установить, что для T имеют место условия теоремы 1. Докажем, что T удовлетворяет условию 1) теоремы 4. Предположим обратное. Тогда имеет место одно из следующих условий:

в) существует такое m_0, что $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{m_0,n}|^p = +\infty$;

г) для любого m ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{m,n}|^p$ сходится, но существует такое $\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$, что $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{m_l,n}|^p \to \infty$ при $l \to \infty$;

В случае в) пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\alpha_n > 0, \ \alpha_n \downarrow 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |c_{m_0,n}|^p = +\infty.$$

Пусть $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ попарно непересекающиеся интервалы на $[0, 1]$. Положим $f_n(x) = |\alpha_n|^{1/p} |\Delta_n|^{1/p}$ при $x \in \Delta_n$ и $f_n(x) = 0$ при $x \notin \Delta_n$. Тогда $\|f_n\|_{L_p} \to 0$, но

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=0}^{\infty} c_{m_0,n} f_n(x)\right|^p dx = \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\Delta_l} \left|\sum_{n=0}^{\infty} c_{m_0,n} f_n(x)\right|^p dx = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l |c_{m_0,n}|^p = +\infty.$$

В случае г) пусть $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ описанная выше последовательность, $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, такая, что $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_0 < 1$. Положим, что числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$; $m_1 < m_2 < \ldots < m_{k-1}$ уже построены. Выберем m_k, а затем n_k так, чтобы

$$\sum_{n=0}^{n_{k-1}} |c_{m_k,n}|^p < \varepsilon_k, \ \sum_{n=n_{k-1}+1}^{\infty} |c_{m_k,n}|^p > \frac{1}{\varepsilon_k^2} + 2, \ \sum_{n=n_k+1}^{\infty} |c_{m_k,n}|^p < \varepsilon_k.$$

При $n_{k-1} < n \leqslant n_k$ положим

$$f_n(x) = \varepsilon_k^{1/p} / |\Delta_n|^{1/p} \text{ при } x \in \Delta_n; \ f_n(x) = 0 \text{ при } x \notin \Delta_n.$$

Ясно, что $\|f_n(x)\|_{L_p} \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны, учитывая, что $\|f_n(x)\|_{L_p} < 1$, легко убедиться, что

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=0}^{\infty} c_{m_k,k} f_n(x)\right|^p dx \geqslant \frac{1}{\varepsilon_k} \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Откуда получим, что T удовлетворяет условию 1) теоремы 4.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ

Գումարման մեթոդների ռեգուլյարության մասին F տարածություններում

Ներկա աշխատանքում քննարկվում է $T=(c_{m,n})_{m=0,}^{\infty}{}_{n=0}^{\infty}$ աղյուսակային մեթոդների ռեգուլյարության հարցը F տարածություններում։ Ապացուցվում է, որ եթե T մեթոդը բավարարում է Տյոպլիցի թեորեմի պայմաններին և կամայական տողում զերոյից տարբեր էլեմենտների քանակը հավասարաչափ սահմանափակ է, ապա նա ռեգուլյար է ցանկացած F տարածությունում։ Ցույց է տրված նաև, որ նշված պայմանները անհրաժեշտ և բավարար են որպեսզի մեթոդը լինի ռեգուլյար չափելի ֆունկցիաների տարածությունում։ Մյուս կողմից $L_p(0<p<)$ տարածություններում T մեթոդի ռեգուլյարության համար վերը նշված պայմաններից վերջինը անհրաժեշտ չէ, ավելի ճիշտ է հետևյալը՝

***Թեորեմ* 4.** Որպեսզի T մեթոդը լինի ռեգուլյար $L_p(0<p<1)$ տարածությունում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_{m,n}|^p<H$, որտեղ H-ը անկախ է m-ից.

2) $\lim\limits_{m\to\infty} c_{m,n}=0$ կամայական ֆիքսված n-ի համար

3) $G_m=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\to 1$, երբ $m\to\infty$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. Robinson*, Proc. London Math. Soc., (2), v. 52 (1950). [2] *Н. Данфорд, Дж. Шварц*, Линейные операторы. Общая теория. Т. 1, ИЛ, М., 1962.