ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 5

УДК 515.164.248

МАТЕМАТИКА

А. А. Огникян

Об одном обобщении оснащенного бордизма*

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 17/V 1984)

В работе обобщается понятие оснащенного бордизма ([1]) и приводится одно применение (теорема 6).

1. a-оснащенные бордизмы. Пусть $a=(a_1, a_2, \ldots, a_k; l)$ символ Шуберта, т. е. последовательность целых чисел, удовлетворяющих условиям $1\leqslant a_1<a_2<\ldots<a_k\leqslant k+l$, $l\geqslant 0$. Если $b=(b_1, b_2, \ldots, b_k; l)$, $c=(c_1, c_2, \ldots, c_k; l)$, то положим $b>c$, если существует t, что $b_i\geqslant c_i$ при $i\leqslant t$ и $b_t>c_t$. Пусть $\xi=(tl\xi, P, X)$ k-мерное векторное расслоение с пространством расслоения $tl\xi$, базой X и проекцией P.

Будем говорить, что имеется a-оснащение $v=(v_1, v_2, \ldots, v_{k+l})$ расслоения ξ, если имеется последовательность сечений $v_1, v_2, \ldots, v_{k+l}$ такая, что для любой точки $x\in X$ можно найти символ $c=c(x)=(c_1, c_2, \ldots, c_k; l)$, $c_i\leqslant a_i$, $i=1, 2, \ldots, k$ такой, что векторы $v_{c_1}(x)$, $v_{c_2}(x), \ldots, v_{c_k}(x)$ линейно-независимы, и для любого символа $b>c$ векторы $v_{b_1}(x), v_{b_2}(x), \ldots, v_{b_k}(x)$ линейно-зависимы.

Пусть $(tl\xi, P, X; v)$ и $(tl\xi', P', X; v')$ два a-оснащенные расслоения. Будем их считать изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi:(tl\xi, P, X)\to(tl\xi', P', X)$ векторных расслоений, так что $\varphi(v_i)=v'_i$, $i=1, 2, \ldots, k+l$. Если $f: X\to Y$ непрерывное отображение, то расслоение $f^*\xi$ снабжается индуцированным a-оснащением.

Символы $G_{k,l}$ и $\gamma^{k,l}$ будут обозначать соответственно многообразие Грассмана k-мерных подпространств в евклидовом пространстве R^{k+l} и его каноническое k-мерное векторное расслоение. Через $S(a)$ обозначим многообразие Шуберта ([2]), соответствующее символу a, через $\gamma(a)$—ограничение $\gamma^{k,l}$ на $S(a)\subseteq G_{k,l}$. Через P_V обозначим ортогональное проектирование пространства R^{k+l} на подпространство V. В R^{k+l} зафиксируем некоторый базис $e_1, e_2, \ldots, e_{k+l}$ и определим сечения v_i расслоения $\gamma(a)$ формулой

$$v_i(V)=P_V(e_i),\quad V\in S(a),\ i=1, 2, \ldots, k+l.$$

Предложение 1.1. *Последовательность сечений* $v=(v_1, v_2, \ldots, v_{k+l})$ *определяет a-оснащение расслоения* $\gamma(a)$.

Теорема 1. ***Множество классов изоморфности всех a-оснащенных векторных расслоений над топологическим пространством X находится в взаимно-однозначном соответствии с множеством всех непрерывных отображений из X в $S(a)$.***

Счетным оснащением k-мерного расслоения ξ назовем счетную последовательность $(v_1, v_2, \dots)$ сечений v_i такую, что для любой точки $x \in X$ существует такой номер $t = t(x)$, что $v_i(x) = 0$ при $i > t$ и ранг системы $v_1(x), v_2(x), \dots, v_t(x)$ равен k. Расслоение ξ вместе с некоторым его счетным оснащением называется счетно-оснащенным расслоением.

Теорема 2. *Множество классов изоморфности всех счетно-оснащенных k-мерных векторных расслоений над X находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством всех непрерывных отображений из X в $G_{k,\infty}$.*

Понятия a-оснащенного подмногообразия и a-бордизма между такими подмногообразиями вводятся аналогично соответствующим классическим понятиям из [1]. Обозначим через $\Pi_n(a)$ множество классов a-бордантности всех n-мерных замкнутых гладко a-оснащенных гладких подмногообразий многообразия R^{n+k}. Стандартным образом [3,4] в $\Pi_n(a)$ вводится аддитивная групповая структура, строится гомоморфизм

$$\tau(n; a) : \pi_{n+k}(T\gamma(a); \infty) \to \Pi_n(a).$$

Теорема 3. *При $n+k \geqslant 1$ гомоморфизм $\tau(n; a)$ является изоморфизмом абелевых групп.*

Символ Шуберта $E(a) = (1, a_1+1, a_2+1, \dots, a_k+1; l)$ будем называть надстройкой над символом a.

Пусть $\psi_{n+k} : R^{n+k} \to R^{n+k+1}$ линейное вложение, определяемое формулой $\psi_{n+k}(e_i) = e_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n+k$. Если (M, v) n-мерное a-оснащенное подмногообразие в R^{n+k} (v обозначает a-оснащение нормального расслоения), то определим $E(a)$-оснащение подмногообразия $\psi_{n+k}(M)$ формулой

$$E(v) = (u, v_1, v_2, \dots, v_{n+k}), \quad u(x) = e_1, \quad x \in \psi_{n+k}(M).$$

Введем обозначение $E(M, v) = (\psi_{n+k}(M), E(v))$.

Будем называть (M, v) и (N, w) стабильно a-бордантными, если для некоторого m существуют такие $E^m(a)$-бордантные подмногообразия (M', v') и (N', w'), что $(M', v') = E^i(M, v)$ и $(N', w') = E^j(N, w)$ для некоторых i и j.

Отношение стабильной a-бордантности — отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности $\Pi_n^s(a)$ снабжается структурой абелевой группы.

Теорема 4. *Имеет место изоморфизм* $\Pi_n^s(a) \cong \pi_{n+k}^s(T\gamma(a))$.

Если $v_1, v_2, \dots, v_{k-r}$ линейно-независимые сечения k-мерного нормального расслоения ν подмногообразия M, то будем говорить, что имеется оснащение коразмерности r подмногообразия M.

Рассмотрим символ $a = a(r, k, l) = (1, 2, \dots, k-r, k-r+l+1, \dots \dots, k+l; l)$. Тогда $a = E^{k-r}(a')$, где $a' = (l+1, l+2, \dots, l+r; l)$, и $\gamma(a) = \gamma^{r,l} \oplus \theta$, где θ тривиальное $(k-r)$-мерное расслоение. Так как $S(a') = G_{r,l}$, то $S(a)$ гомеоморфно $G_{r,l}$. Поэтому $T\gamma(a)$ гомеоморфно $S^{k-r}(T\gamma^{r,l})$ и $\Pi_n(a) \cong \pi_{n+k}(S^{k-r}(T\gamma^{r,l}); \infty)$. Известно [2], что $T\gamma(a)$ $(k-1)$-связно. Если $k > n+1$, то $\Pi_{n+k}(S^{k-r}(T\gamma^{r,l}; \infty) \cong \pi_{n+r}^s(T\gamma^{r,l})$. При

$l=0$ имеем $\Pi_n(a)\simeq\pi_n^s(S^0)$. Если $l>0$, то переходя к пределу при $l\to\infty$ и используя теорему 2, можно доказать утверждение.

Теорема 5. *Элементы группы $\pi^s_{n+r}(T\gamma^{r,\infty})$ могут быть представлены как классы бордизмов всех n-мерных замкнутых гладких подмногообразий с классом эквивалентности (по надстройке) гладких оснащений коразмерности r на нормальных расслоениях.*

Можно несколько расширить запас подмногообразий с оснащением коразмерности r, рассматривая последовательности $v=(v_1, v_2, \dots$ $\dots, v_{k-r})$ линейно-независимых гладких сечений v_i расслоения $v\oplus\tau$ при условии, что линейное проектирование системы v на нормальное расслоение ν данного подмногообразия вдоль касательного расслоения τ происходит без вырождения.

2. Связь между группами бордизмов коразмерности 0 и 1. Пусть M замкнутое ориентируемое n-мерное гладкое подмногообразие в R^{n+k}, v-оснащение коразмерности 1 нормального расслоения ν. Тогда $\nu=\theta\oplus\xi$, где подрасслоение θ натянуто на сечения $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$, ξ — одномерное тривиальное ортогональное дополнение к θ. Рассмотрим замкнутую ε-трубчатую окрестность ν_ε подмногообразия M в R^{n+k}. Положим $\theta_\varepsilon=\nu_\varepsilon\cap tl\theta$, $\xi_\varepsilon=\nu_\varepsilon\cap tl\xi$. При ε, достаточно малом, $\nu_\varepsilon, \theta_\varepsilon, \xi_\varepsilon$ будут гладкими подмногообразиями в R^{n+k}. Обозначим через $\bar\xi$ нормальное расслоение подмногообразия θ_ε, через $\bar\xi_\varepsilon$ — замкнутую ε-трубчатую окрестность θ_ε в $tl\bar\xi$. Тогда $\bar\xi|_M=\xi$ и ξ_ε подмногообразие в $\bar\xi_\varepsilon$. Рассмотрим две тривиализации расслоения $\bar\xi$, определяемые сечениями w^j_ε, $j=0, 1$, где $\|w^j_\varepsilon\|=\varepsilon$, $w^0_\varepsilon(x)=-w^1_\varepsilon(x)$, $x\in\theta_\varepsilon$. Через f^j_ε обозначим диффеоморфизм, сопоставляющий точке $x\in\theta_\varepsilon$ конец вектора $w^j_\varepsilon(x)$, отложенный из точки x. Положим $M^j_\varepsilon=f^j_\varepsilon(M)$, $\theta^j_\varepsilon=f^j_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$, тогда $\partial\xi_\varepsilon=M^0_\varepsilon\cup M^1_\varepsilon$, $\partial\bar\xi_\varepsilon=$ $=\theta^0_\varepsilon\cup\theta^1_\varepsilon$. Касательное пространство к θ_ε в точке $x\in M$ содержит векторы $v_i(x)$. Обозначим через $df^j_\varepsilon(v_i)$ сечение ограничения над M^j_ε касательного расслоения подмногообразия θ^j_ε, определяемого формулой

$$df^j_\varepsilon(v_i)(f^j_\varepsilon(x))=(df^j_\varepsilon)_x(v_i(x)),\quad x\in M.$$

Здесь $(df^j_\varepsilon)_x$ обозначает дифференциал отображения f^j_ε в точке x. Возникает оснащение коразмерности 1 $df^j_\varepsilon(v)=(df^j_\varepsilon(v_1), \dots, df^j_\varepsilon(v_{k-1}))$ подмногообразия $M^j_\varepsilon\subset R^{n+k}$. Тогда подмногообразие $\partial\xi_\varepsilon\subset R^{n+k}$ также оснащается и через $df_\varepsilon(v)$ обозначим соответствующее оснащение коразмерности 1. Ниже через $[(M, v)]$ будем обозначать класс бордизмов оснащенного многообразия (M, v).

Предложение 2.1. *Для достаточно малого ε и $j=0, 1$ в группе $\pi^s_{n+1}(RP^\infty)$ выполняются тождества*

$$[(M^j_\varepsilon, df^j_\varepsilon(v))]=[(M, v)],\ [(\partial\xi_\varepsilon, df_\varepsilon(v))]=0.$$

Из предложения следует, что $2[(M, v)]=0$. Пусть отображение $F: S^1\to RP^\infty$ индуцировано каноническим вложением $T\gamma^{1,0}\to T\gamma^{1,k}$. Индуцированный гомоморфизм $F_*:\pi^s_{n+1}(S^1)\to\pi^s_{n+1}(RP^\infty)$ описывается так: элементу $[(M, \bar v)]\in\pi^s_n(S^0)$, где $\bar v=(v_1, v_2, \dots, v_k)$ оснащение коразмер-

ности 0, сопоставляется элемент $[(M, v)] \in \pi^s_{n+1}(RP^\infty)$, где $v=(v_2, v_3, \ldots$
$\ldots, v_k)$ оснащение коразмерности 1.

Теорема 6. *При гомоморфизме забывания F_* образ группы $\pi^s_n(S^0)$ содержится в подгруппе элементов второго порядка группы $\pi^s_{n+1}(RP^\infty)$.*

Ереванский государственный университет

Հ. Հ. ՕՀՆԻԿՅԱՆ

Հագեցված բորդիզմի մի ընդհանրացման մասին

Աշխատանքում ընդհանրացվում է հանգեցված բորդիզմի [1] հասկացությունը։ Նախապես ներմուծվում է $\mathfrak{a}$-հագեցված վեկտորական շերտավորման գաղափարը, որտեղ $\mathfrak{a}$-ն Շուբերտի սիմվոլ է։ Տրված է (թեորեմ 1) այդպիսի շերտավորումների տոպոլոգիական դասակարգում։ Դասական գաղափարների համանմանությամբ ներմուծվում են $\mathfrak{a}$-հագեցված ողորկ բազմակերպության և այդպիսի բազմակերպությունների $\mathfrak{a}$-բորդիզմի հասկացությունները։ Միևնույն չափողականության, փակ, ողորկ $\mathfrak{a}$-հագեցված, ողորկ բազմակերպությունների (ստացիոնար) $\mathfrak{a}$-բորդիզմների խմբերի հաշվումը հանգեցվում է (թեորեմներ 3, 4) հատուկ տարածությունների (ստացիոնար) հոմոտոպիական խմբերի հաշվմանը։ Ներմուծվում և ուսումնասիրվում է (թեորեմ 5) r-կոչափականության բորդիզմի հասկացությունը։ Այն կիրառվում է (թեորեմ 6) $\pi^s_n(S^0)$ խմբի կերպարը $\pi^s_{n+1}(RP^\infty)$ խմբում մի հոմոմորֆիզմի դեպքում նկարագրելու համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. С. Понтрягин,* Гладкие многообразия и их приложения в теории гомотопий, Наука, М., 1976. [2] *Дж. Милнор, Дж. Сташеф,* Характеристические классы, Мир, М., 1979. [3] *М. Хирш,* Дифференциальная топология, Мир, М., 1979. [4] *Р. Стонг,* Заметки по теории кобордизмов, Мир, М., 1973.