ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 4

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. А. Афян

Об интегральных уравнениях с неподвижными особенностями в теории ветвящихся трещин

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 30/V 1984)

В работе ([1]) рассмотрены граничные интегральные уравнения задачи об упругой плоскости, ослабленной кусочно-гладкой трещиной. Вывод этих уравнений (см. ([2])) основан на предельном переходе в задаче о системе гладких трещин, не имеющих общих точек.

В настоящей работе показано, как с использованием метода конформных отображений Н. И. Мусхелишвили ([3]) задача о кусочно-гладкой трещине сводится к системе сингулярных интегральных уравнений на единичной окружности с неподвижными особенностями. Методом механических квадратур получено их численное решение с обоснованием сходимости для слабо ветвящихся трещин.

Пусть $\gamma\subset C$—ограниченная кусочно-гладкая кривая. Считаем, что в окрестности O_z каждой точки $z\in\gamma$ γ устроена следующим образом: 1) z—внутренняя точка трещины, т. е. $\gamma\cap O_z$—диффеоморфно открытому интервалу, либо 2) z—узловая точка γ, т. е. $\gamma\cap O_z=(\gamma_n+z)\cap O_z$, либо 3) z—граничная точка γ, т. е. $\gamma\cap O_z=(\gamma_1+z)\cap O_z$. Здесь γ_n—система $n\geqslant 2$ разрезов, выходящих из нуля.

Соответствующее отображение единичного круга на $C\setminus\gamma_n$ имеет вид (см. ([4]))

$$\omega_n(s)=\frac{1}{s}\prod_{j=1}^{n}(1-se^{i\alpha_j})^{\lambda_j},\ |s|<1,\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=2,$$

$$\alpha_j\in[0,\ 2\pi],\quad 0\leqslant\lambda_j\leqslant 2\quad (j=1,\ \ldots,\ n),$$

где $\lambda_j\pi$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$—углы между разрезами.

Предположим, что $C\setminus\gamma_n$—область и пусть $z=\omega(s)$—конформное отображение единичного круга на эту область.

Замечание 1. Пусть $z\in\gamma$ узловая точка, $\lambda_j\pi$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$ углы между разрезами. Тогда для некоторых $C\neq 0$ и $t=\omega^{-1}(z)$ имеем:

$$\omega'(s)\simeq C(t-s)^{\lambda_{j_0}-1},\ s\to t=e^{-i\alpha_{j_0}},\quad 1\leqslant j_0\leqslant n.$$

Обозначим через $R_m(s)$ многочлен степени m, обращающейся в нуль в тех точках единичной окружности $\Gamma(|t|=1)$, где $\omega'(t)=0$ и $\omega(t)\neq 0$. В силу замечания 1 функция $t^{m+2}\overline{R_m(t)}\omega(t)[\overline{\omega'(t)}]^{-1}$ может иметь скачки первого рода лишь в прообразах узловых точек трещины. Более того, пусть $\eta(t)\neq 0$ гладкая функция на Γ за исключением прообразов узловых точек, в окрестности каждой из которых она совпадает с некоторой ступенчатой функцией, так что $p(t)=$ $=t^{m+2}\overline{R}_m(1/t)\omega(t)[\tau_1(t)\overline{\omega'(t)}]^{-1}$ непрерывно дифференцируема при $t\in\Gamma$.

Задача теории упругости для бесконечного изотропного тела с кусочно-гладкой трещиной γ, когда на бесконечности действуют постоянные усилия, в терминах комплексных потенциалов $\varphi(s)$, $\psi(s)$ имеет вид (см. например ([3]))

$$\varphi(t)+\frac{\omega(t)}{\overline{\omega'(t)}}\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=C_1 t^2\frac{\omega(t)}{\overline{\omega'(t)}}-\frac{C_1}{t}-\bar{c}_2 t,\quad t\in\Gamma, \tag{1}$$

где $\varphi(s)$, $\psi(s)$ аналитические функции при $|s|<1$, $\varphi(0)=0$, $2C_1+\mathrm{Re}\,C_2=$ $=\sigma_y^\infty$, $2C_1-\mathrm{Re}\,C_2=\sigma_x^\infty$, $\mathrm{Im}\,C_2=\sigma_{xy}^\infty$, σ^∞—заданный постоянный тензор напряжения.

Введем необходимые для дальнейшего обозначения: S_Γ—оператор сингулярного интегрирования $(S_\Gamma f)(\tau)=\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int\limits_\Gamma\dfrac{f(t)dt}{t-\tau}$, $P=(I+S_\Gamma)/2$, $Q=I-P$, K_g—оператор умножения на функцию $g(\tau):(K_g f)(\tau)=$ $=g(\tau)f(\tau)$, $(Vf)(\tau)=\overline{f(\tau)}$, $[S_\Gamma, K_g]=S_\Gamma K_g-K_g S_\Gamma$.

После элементарных преобразований из (1) получим сингулярное интегральное уравнение на единичной окружности с неподвижными особенностями $(B\varphi')(\tau)=F(\tau)$; $\tau\in\Gamma$. Здесь оператор B имеет вид $B=A+K_{b_1}[S_\Gamma, K_{\tau_1}]V+K_{b_2}TV+KV$, где K—вполне непрерывный оператор, T—оператор с m неподвижными особенностями, функции $b_1(\tau)$, $b_2(\tau)$, $F(\tau)$ $(\tau\in\Gamma)$ определяются в ходе преобразований из уравнения (1). Оператор A определяется формулой

$$A=a(t)P+b(t)Q+(c(t)P+d(t)Q)V, \tag{3}$$

$$a(t)=b(t)=\overline{R}_m^2(1/t),\ c(t)=p_2(t)\overline{R}_m(1/t)-p(t)\overline{R}'_m(1/t)t^{-m-2},$$

$$d(t)=0,\quad p_2(t)=(p(t)t^{-m-2})'_t.$$

В случае гладкой трещины $(n=1)$ $B=A+KV$.

Замечание 2. Интегральный оператор T с неподвижными особенностями, входящий в (2), имеет вид

$$(Tu)(\tau)=\frac{p(\tau)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\tau_1(t)-\tau_1(\tau)}{(t-\tau)^2}u(t)dt,\quad |\tau|=1.$$

Нетрудно установить его ограниченность в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Известно (см. ([5])) матричное равенство

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I\\ V & -V\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & N^{-1}AN\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & V\\ I & -V\end{pmatrix}=M,\ (Nf)(t)=-if(t),\ t\in\Gamma, \tag{4}$$

$$M=\begin{pmatrix} a(t)P+b(t)Q & c(t)P+d(t)Q\\ \overline{c(t)}VPV+\overline{d(t)}VQV & \overline{a(t)}VPV+b(t)VQV\end{pmatrix}.$$

Оператор M лишь вполне непрерывным слагаемым отличается от оператора $\tilde{A}$, определенного в пространстве $L_p^2(\Gamma)=L_p(\Gamma)\times L_p(\Gamma)$ равенством

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\frac{a(t)}{d(t)} & \frac{c(t)}{b(t)}\end{pmatrix}P+\begin{pmatrix}\frac{b(t)}{c(t)} & \frac{d(t)}{a(t)}\end{pmatrix}Q=\tilde{a}(t)P+\tilde{b}(t)Q. \qquad (5)$$

Операторы A и $\tilde{A}$ одновременно являются либо не являются нетеровыми в соответствующих пространствах, и $\operatorname{Ind} A=\frac{1}{2}\operatorname{Ind}\tilde{A}$ (см. [6]). Чтобы оператор $\tilde{A}$ был нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы

$$a(t)\overline{b(t)}-c(t)\overline{d(t)}\neq 0 \quad (t\in\Gamma). \qquad (6)$$

Легко видеть, что условие (6) не выполняется в точках s_k, где $R_m(s_k)=0$ $(k=1,\ldots,m)$, и матрицы $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ в этих точках имеют нули $2m$ порядка. Следуя [7], матрицы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ однозначно можно представить в виде

$$\tilde{a}(t)=\tilde{a}_0(t)D_*(t),\quad \tilde{b}(t)=\tilde{b}_0(t)C_*(t), \qquad (7)$$

$$D_*(t)=\prod_{j=1}^{m}(t-s_j)^2,\quad C_*(t)=t^{-2m}\prod_{j=1}^{m}s_j^{-2}D_*(t),$$

$$\tilde{a}_0(t)=\begin{pmatrix} c^2t^{-2m} & c(t)\prod\limits_{j=1}^{m}(t-s_j)^{-2}\\ 0 & \dot{c}^2\prod\limits_{j=1}^{m}s_j^2\end{pmatrix},\quad \tilde{b}_0(t)=\begin{pmatrix} c^2\prod\limits_{j=1}^{m}s_j^2 & 0\\ \overline{c(t)}t^{2m}\prod\limits_{j=1}^{m}s_j^2(t-s_j)^{-2} & \bar{c}^2t^{2m}\end{pmatrix},$$

$\det\tilde{a}_0(t)\neq 0$, $\det\tilde{b}_0(t)\neq 0$, $(t\in\Gamma)$, а постоянная c равна коэффициенту при старшем члене полинома $\overline{R_m(t)}$. Далее обозначим через $\tilde{L}_p^2(\Gamma)=\{D_*^{-1}(t)Pf+C_*^{-1}(t)Qf,\ f\in L_p^2(\Gamma)\}$ каноническое пространство, построенное по оператору $\tilde{A}$, $D=D_*(t)P+C_*(t)Q$, $\tilde{A}_0\equiv\tilde{a}_0(t)P+\tilde{b}_0(t)Q$.

Оператор $\tilde{A}_0$ нетеров, следовательно оператор $\tilde{A}=\tilde{A}_0D$ тоже нетеров из пространства $\tilde{L}_p^2(\Gamma)$ в $L_p^2(\Gamma)$. При этом

$$\operatorname{Ind}\tilde{A}=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det\tilde{a}_0(t)}{\det\tilde{b}_0(t)}\right]_\Gamma=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\prod_{j=1}^{m}s_j^{-4}t^{-4m}\right]_\Gamma=0.$$

Отсюда получаем, что $\operatorname{Ind} A=0$ и оператор A (см. [5]) нетеров из $\tilde{L}_p(\Gamma)\equiv L_p(\Gamma)$, $\prod\limits_{j=1}^{m}(t-s_j)^2$ в $L_p(\Gamma)$.

Лемма 1. *Для того чтобы $A\varphi=f$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $M(\varphi, V\varphi)^*=(f, Vf)^*$.*

Лемма 2. *Пусть* $\dim\operatorname{Ker} A=0$. *Если $M(\varphi,\varphi_1)^*=(f, Vf)^*$, то $\varphi_1=V\varphi$.*

Для численного решения уравнения

$$(A+KV)\varphi=f \quad (f\in H^\mu(\Gamma),\ 0<\mu<1) \qquad (8)$$

воспользуемся методом механических квадратур. Ищем решение $\varphi(t)$ в виде отрезка ряда Фурье

$$\varphi_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} d_k t_k,\ n=1,\ 2,\ \ldots,\ |t|=1. \qquad (9)$$

После подстановки $\varphi_n(t)$ в (9) получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов d_k, $k=0,\ \pm1,\ \ldots,\ \pm n$. Из теоремы 8.3 работы [6] и лемм 1, 2 следует

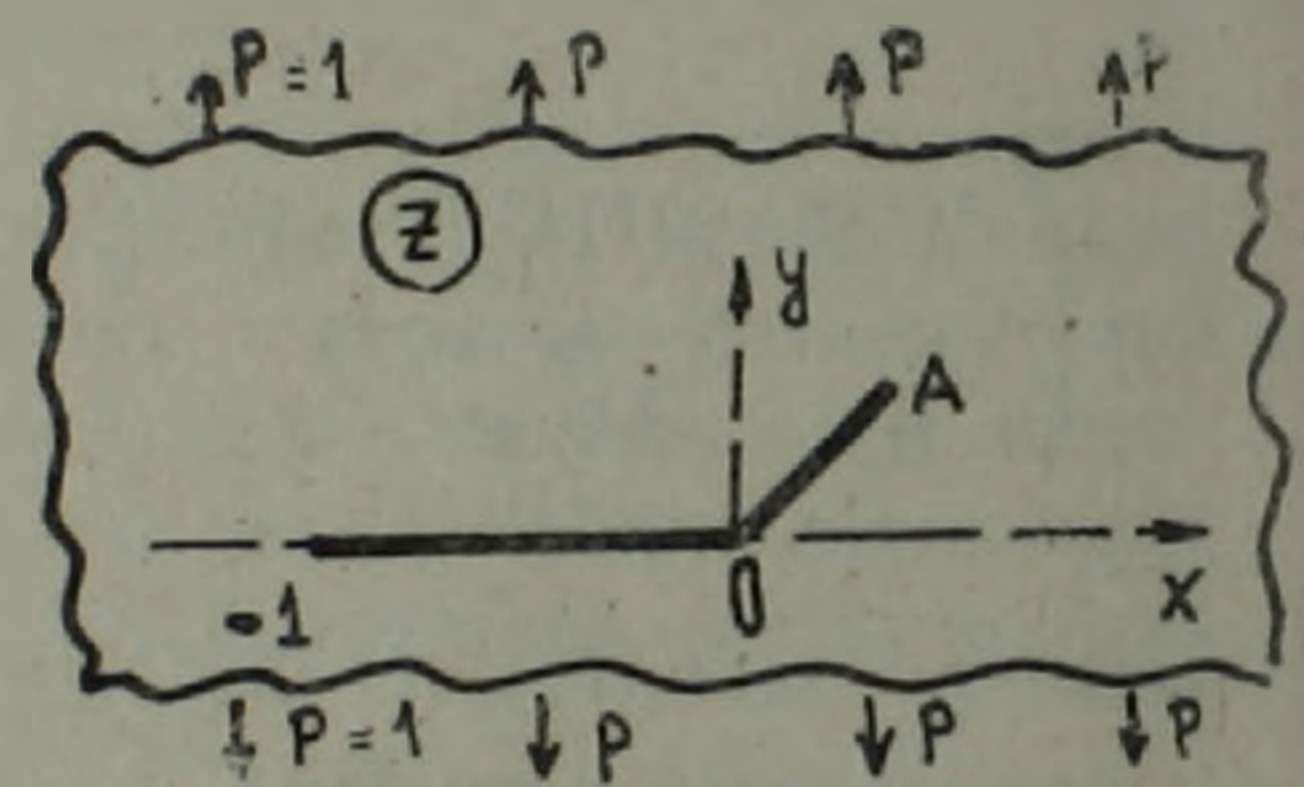
Теорема. *Для всех достаточно больших n и для любого $f(t)\in H^{\mu}(\Gamma)$ $(0<\mu<1)$ вышеуказанная система уравнений имеет единственное решение $\{d_k\}_{-n}^{n}$ и векторы* (9) *при $n\to\infty$ сходятся по норме пространства $L_p(\Gamma)$ к решению уравнения* (8).

Следствие. Если для достаточно малых $\varepsilon>0$ $\max\limits_{t\in\Gamma}|\eta(t)-1|\leqslant\varepsilon$, то последовательность (9) сходится к решению уравнения (2) при $n\to\infty$ в норме пространства $L_p(\Gamma)$.

Замечание 3. В случае двух трещин, когда отношение их длин мало, задача была рассмотрена в [7]. Однако, так же как и в в [8], существенно использовалось наличие именно двух трещин.

При $n=2$ составлена таблица численных результатов для коэффициентов интенсивности, вычисленных в точке A (см. рисунок).

	0°	45°	90°
k_1	0,7768	0,6257	0,0251
	0,7485	0,4795	−0,070
	0,7394	0,6531	0,1882
k_2	0,0001	−0,5384	−0,0014
	−0,0071	−0,4049	−0,3203
	0,0003	−0,3881	−0,4128



Отношение длин равно 0,15. В первой строке таблицы приведены значения, вычисленные рассмотренным методом, во второй строке использованы результаты работы [8]. Последняя строка соответствует коэффициентам интенсивности, полученным методом полиномиального приближения отображающей функции.

Автор выражает глубокую благодарность Н. Ф. Морозову и М. В. Паукшто за постановки задачи и полезные обсуждения.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Բ. Ա. ԱՓՅԱՆ

Ճյուղավորված ճաքերի տեսության մեջ անշարժ եզակիություններով ինտեգրալ հավասարումների մասին

Առաջարկված է Ն. Ի. Մուսխելիշվիլու կոնֆորմ արտապատկերումների մեթոդի մոդիֆիկացիան։ Կտոր առ կտոր ողորկ ճաքի վերաբերյալ խնդիրը բերված է միավոր շրջանագծի վրա անշարժ եզակիություններով սինգուլյար

ինտեգրալ հավասարումների համակարգի։ Դրանով իսկ եզակետային խնդրի եզակիությունները պարունակվում են ինտեգրալ հավասարման սիմվոլի մեջ։ Մեխանիկական կվադրատուրաների մեթոդով ստացված է թվային լուծումը և թույլ ճյուղավորված ճաքերի համար հիմնավորված է զուգամիտությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. П. Саврук,* Двумерные задачи упругости для тел в трещинами, Киев, 1976. [2] *P. S. Teocaris,* Trans ASME, E 44 №4(1977). [3] *Н. И. Мусхелишвили,* Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука, М., 1966. [4] *Г. М. Голузин* Геометрическая теория функций комплексного переменного, Наука, М., 1966. [5] *В. И. Няга,* Мат. исследования (Кишинев), вып. 73, 1983. [6] *З. Пресдорф,* Некоторые классы сингулярных уравнений, Мир, М., 1979. [7] *M. Amestoy,* C. R. Acad. Sc. Paris, Serie B—99, t 289 (1979). [8] *S. N. Chatterjee* Int. J. Solids and Struct., 11, № 5 (1975).