ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 4

УДК 519.63

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Г. В. Генджоян

Решение краевых задач для уравнения Лапласа в двусвязных бесконечных областях, ограниченных окружностями, методом последовательных приближений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 6/VII 1983)

Пусть D двусвязная бесконечная область на комплексной плоскости $z=x+iy$, ограниченная непересекающимися окружностями Γ_1 и Γ_2. Ищется действительное ограниченное решение $u(z)=u(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

в области D, непрерывное в $D+\Gamma_1+\Gamma_2$, удовлетворяющее одному из граничных условий;

а) $u|_{\Gamma_1}=f_1(z), \quad u|_{\Gamma_2}=f_2(z)$ (задача Дирихле), (2)

б) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=f_1(z), \ u|_{\Gamma_2}=f_2(z)$ (смешанная задача), (3)

в) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=f_1(z), \ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=f_2(z)$ (задача Неймана). (4)

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$—производная по направлению внешней нормали; $f_1(z)$ и $f_2(z)$—действительные непрерывные функции, определенные соответственно на Γ_1 и Γ_2. В случае краевого условия в) дополнительно требуется выполнение условий:

$$\int_{\Gamma_1} f_1(z)ds+\int_{\Gamma_2} f_2(z)ds=0, \tag{5}$$

$$\lim_{z\to\infty} u(z)=0. \tag{6}$$

Известно, что каждая из трех сформулированных задач имеет единственное решение. Наша цель—показать, что эти решения могут быть получены методом последовательных приближений.

Не ограничивая общности, можно считать, что окружность Γ_1—единичная окружность, а Γ_2—окружность $|z-z_0|=R$ с центром в действительной точке $z_0=x_0>0$ и радиусом R. По условию $x_0>R+1$.

Следуя работе [1], будем искать решение уравнения (1) в виде

$$u(z)=\mathrm{Re}\{\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+c_1[\ln z-\ln(z-x_0)]\}, \tag{7}$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ искомые функции комплексного переменного z, ограниченные и аналитические вне кругов $|z|\leqslant 1$ и $|z-x_0|\leqslant R$ соответственно, непрерывные вплоть до границы, а c_1 действительная постоянная.

1. Задача Дирихле. Условие $u|_{\Gamma_1}=f_1(z)$ записывается через функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ в виде

$$\operatorname{Re}\{\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+c_1[\ln z-\ln(z-x_0)]\}_{|z|=1}=f_1(z),$$

или, что то же,

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\varphi_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)}+\varphi_2(z)-c_1\ln(x_0-z)\right]_{|z|=1}=f_1(z).$$

Применяя формулу Шварца ([2]), отсюда получим

$$\overline{\varphi_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)}+\varphi_2(z)-c_1\ln(x_0-z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}f_1(t)\,\frac{t+z}{t(t-z)}\,dt+ \tag{8}$$

$$+ic_2\equiv F_1(z)+ic_2,\quad (|z|<1).$$

Аналогично из условия $u|_{\Gamma_2}=f_2(z)$ получим

$$\operatorname{Re}\left[\varphi_1(x_0+Rz)+\overline{\varphi_2\left(x_0+\frac{R}{\bar z}\right)}+c_1\ln(x_0+Rz)\right]_{|z|=1}-c_1\ln R=f_2(x_0+Rz),$$

и по формуле Шварца

$$\varphi_1(x_0+Rz)+\overline{\varphi_2\left(x_0+\frac{R}{\bar z}\right)}+c_1\ln\frac{x_0+Rz}{R}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}f_2(x_0+Rt)\,\frac{t+z}{(t-z)t}\,dt+$$

$$+ic_3\equiv F_2(z)+ic_3,\quad (|z|<1). \tag{9}$$

В обозначениях

$$\overline{\varphi_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)}=\psi_1(z),\qquad \overline{\varphi_2\left(x_0+\frac{R}{\bar z}\right)}=\psi_2(z) \tag{10}$$

уравнения (8) и (9) можно написать в виде системы

$$\psi_1(z)+\overline{\psi_2\left(\frac{R}{\bar z-x_0}\right)}-c_1\ln(x_0-z)=F_1(z)+ic_2, \tag{11'}$$

$$\overline{\psi_1\left(\frac{1}{x_0+R\bar z}\right)}+\psi_2(z)+c_1\ln\frac{x_0+Rz}{R}=F_2(z)+ic_3. \tag{11''}$$

Подставляя из второго уравнения выражение функции $\psi_2(z)$ в первое уравнение системы, получим относительно неизвестной функции $\psi_1(z)$ функциональное уравнение

$$\psi_1(z)-\psi_1(\lambda(z))=F(z),\quad (|z|<1), \tag{12}$$

где

$$F(z)=F_1(z)-\overline{F_2\left(\frac{R}{\bar z-x_0}\right)}+c_1\ln\left(\frac{x_0}{R}+\frac{R}{\bar z-x_0}\right)+c_1\ln(x_0-z)+i(c_2+c_3),$$

$$\lambda(z)=\frac{z-x_0}{R^2+x_0(z-x_0)}. \tag{13}$$

Функция $\lambda(z)$ аналитична в круге $|z|<1$, удовлетворяет условию $|\lambda(z)|<1$, $(|z|\leqslant 1)$ и поэтому имеет в нем единственную неподвижную точку z_λ. Нетрудно убедиться, что

$$0<z_\lambda=\frac{x_0^2-R^2+1-\sqrt{(x_0^2-R^2+1)^2-4x_0^2}}{2x_0}<1.$$

Ясно, что если (12) имеет решение, то необходимо

$$F(z_\lambda)=0. \qquad (14)$$

В работе ([3]) показано, что условие (14) является и достаточным для разрешимости уравнения (12) и, после некоторого преобразования этого уравнения, его можно решить методом последовательных приближений.

Условию (14) можно удовлетворить за счет выбора постоянных c_1, c_2 и c_3, входящих в выражение функции $F(z)$. Подставляя решение $\psi_1(z)$ уравнения (12) в соотношение (11″), получим $\psi_2(z)$.

Из (7) и (10) получим искомое решение задачи (1), (2) через найденные аналитические функции $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ и постоянную c_1 в виде

$$u(z)=\operatorname{Re}\left\{\overline{\psi_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)}+\overline{\psi_2\left(x_0+\frac{R}{\bar z}\right)}+c_1[\ln z-\ln(z-x_0)]\right\}. \qquad (15)$$

2. Смешанная задача. Условие $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=f_1(z)$ записывается в виде $\frac{\partial}{\partial n}\operatorname{Re}\{\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+c_1[\ln z-\ln(z-x_0)]\}_{|z|=1}=f_1(z)$, что эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial n}\operatorname{Re}\left[-\overline{\varphi_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)}+\varphi_2(z)-c_1\ln(x_0-z)\right]_{|z|=1}=f_1(z)+c_1. \qquad (16)$$

Его правая часть как граничное значение нормальной производной гармонической в единичном круге функции удовлетворяет необходимому условию

$$c_1=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} f_1(t)dt. \qquad (17)$$

Тогда аналитическая в единичном круге функция

$$-\overline{\varphi_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)}+\varphi_2(z)-c_1\ln(x_0-z)$$

определяется формулой (см. работу ([2]))

$$\overline{\varphi_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)}-\varphi_2(z)+c_1\ln(x_0-z)=\gamma_1(z)+c_4, \qquad (18)$$

где c_4—произвольная постоянная, а функция $\gamma_1(z)$ определяется интегралом $\gamma_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|=1}(f_1(t)+c_1)\frac{\ln(t-z)}{t}dt.$

Условие $u|_{\Gamma_2}=f_2(z)$ снова приводит к соотношению (9). Из формул (18) и (9) приходим теперь к функциональному уравнению

$$\psi_1(z)+\psi_1(\lambda(z))=F(z),\ (|z|<1), \tag{19}$$

где $F(z)=\overline{F_2\left(\frac{R}{z-x_0}\right)}+\gamma_1(z)-c_1\ln\left(\frac{x_0}{R}+\frac{R}{\bar{z}-x_0}\right)-c_1\ln(x_0-z)-ic_3+c_4$,

а $\lambda(z)$ определено формулой (13).

По методу, предложенному в работе [3], уравнение (19) при любой аналитической правой части $F(z)$ преобразуется в новое уравнение, которое можно решить методом последовательных приближений.

3. Задача Неймана. Граничное условие $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=f_1(z)$ приводит к уравнению (18), а условие $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=f_2(z)$ к уравнению вида

$$\varphi_1(x_0+Rz)-\overline{\varphi_2\left(x_0+\frac{R}{\bar{z}}\right)}+c_1\ln(x_0+Rz)=\gamma_2(z)+c_5, \tag{20}$$

с дополнительным условием $c_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z-x_0|=R}f_2(z)ds$. Но последнее соотношение автоматически выполняется благодаря условиям (5) и (17).

Уравнения (18) и (20) приводят для $\psi_1(z)$ к уравнению

$$\psi_1(z)-\psi_1(\lambda(z))=F(z)+c_4-\bar{c}_5.$$

Из условия (14) определяется постоянная $c_4-\bar{c}_5$. Решение последнего уравнения, как и выше, можно получить с помощью последовательных приближений.

Таким образом мы получим решение $u(z)$ задачи (1), (4), имеющее предел при $z\to\infty$. Тогда $u(z)-u(\infty)$ будет решением той же задачи, исчезающим в бесконечности.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Գ. Վ. ԳԵՆՋՈՅԱՆ

Լապլասի հավասարման համար եզրային խնդիրների լուծումը հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով շրջանագծերով սահմանափակված երկկապ անվերջ տիրույթներում

Հոդվածում $z=x+iy$ *կոմպլեքս հարթության* $|z|\leqslant 1$, $|z-x_0|\leqslant R$ $(x_0>R+1)$ *շրջաններից դուրս ընկած անվերջ տիրույթում հարմոնիկ* $u(z)=u(x, y)$ *ֆունկցիան եզրային*

ա) $u|_{|z|=1}=f_1(z)$, $u|_{|z-x_0|=R}=f_2(z)$,

բ) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{|z|=1}=f_1(z)$, $u|_{|z-x_0|=R}=f_2(z)$,

գ) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|z|=1}=f_1(z),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|z-x_0|=R}=f_2(z)$

պայմաններից ցանկացածի դեպքում փնտրվում է

$$u(z)=\mathrm{Re}\{\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+c_1[\ln z-\ln(z-x_0)]\}$$

տեսքով, որտեղ $\varphi_1(z)$ և $\varphi_2(z)$ ֆունկցիաները սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաներ են $|z|\leqslant 1$ և $|z-x_0|\leqslant R$ շրջաններից դուրս համապատասխանաբար, իսկ c_1-ն իրական հաստատուն է։

Ցույց է տրվում, որ $\varphi_1(z)$ և $\varphi_2(z)$ ֆունկցիաների գտնելը հանգում է $\psi(z)\pm\psi(\lambda(z))=F(z)$ ֆունկցիոնալ հավասարման լուծմանը $\psi(z)$-ի նկատմամբ՝ հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով, երբ տրված են միավոր շրջանում անալիտիկ $F(z)$ և $\lambda(z)$, $(|\lambda(z)|<1)$ ֆունկցիաները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Бицадзе*, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. Наука, М., 1966. [2] *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат*, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958. [3] *Л. С. Дарбинян*, Уч. зап. Ереванского гос. ун-та, № 3, 1982.