ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 4

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

К. Г. Казарян

Эффективное решение кратной интерполяционной задачи в классах H^{∞} в полуплоскости и в полосе

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 17/V 1984)

1.1 (а). В работе М. М. Джрбашяна ([1]) была поставлена следующая задача свободной интерполяции с кратными узлами в классах $H_p(0<p<\infty)$ Харди—Рисса.

Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$—произвольная последовательность комплексных чисел из единичного круга, и для данного $k(1\leqslant k<+\infty)$ $s_k\geqslant 1$—кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$.

Выявить условия на последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и на пространство последовательностей J, при которых имеет место совпадение

$$\{(f^{(s_k-1)}(\alpha_k))_{k=1}^\infty : f\in H_p\}=J, \tag{1}$$

и построить аппарат для эффективного представления решений интерполяционной задачи

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k)=\gamma_k(k=1, 2, \ldots); \quad \{\gamma_k\}_1^\infty\in J. \tag{2}$$

В том специальном случае, когда $\{\alpha_k\}_1^\infty$—суть отличные друг от друга точки круга $|z|<1$ и, таким образом, $s_k=1$ $(k=1, 2, \ldots)$, эта задача сводится к интерполяционной задаче с простыми узлами:

$$f(\alpha_k)=\gamma_k \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{2'}$$

Критерии *существования* решения задачи (1)—(2′) были установлены в ряде работ (см. ([1])). Отметим, однако, что они существенно опираются на методы теории гильбертовых и банаховых пространств.

(б). В работе М. М. Джрбашяна ([1]) был предложен новый, аналитический метод для полного решения сформулированной выше общей интерполяционной задачи (1)—(2) в классе H_2, метод, позволяющий дать также аналитический аппарат для представления решений этой задачи. Он основан на построении специальных систем аналитических в круге $|z|<1$ функций, ассоциированных с последовательностью $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и биортогональных на окружности $|z|=1$.

Применением указанного метода биортогонализации М. М. Джрбашяна было дано полное решение общей интерполяционной задачи (1)—(2) в классах $H_p(0<p<+\infty)$ в круге $|z|<1$, а также в классах H_p $(1<p<+\infty)$ в полуплоскости и в угловых областях комплексной плоскости (см. ([1-8])).

(в). Критерий существования решения задачи (1)—(2) в классе

H^∞ при условии $\sup\limits_{k\geq 1}\{p_k\}<+\infty$ был дан А. М. Джрбашяном ([7]). В случае их существования эффективное представление решений задачи (1)—(2′) с простыми узлами в классе H^∞ в круге было дано П. Джонсом (препринт; см. также ([9]), где приведена упрощенная конструкция П. Джонса). Этот результат был обобщен В. М. Мартиросяном ([10]). С применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна им был построен аналитический аппарат, позволяющий. в случае их существования, представлять решения интерполяционной задачи (1)—(2) в классе H^∞ в круге.

(г). В данной работе анонсируются теоремы, в которых дается эффективное решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классах H^∞ в полуплоскости и в полосе. При установлении этих результатов также существенно используется метод биортогонализации М. М. Джрбашяна.

Отметим здесь же, что при наличии кратностей у узлов интерполяции анонсированные в данной заметке результаты не получаются из соответствующих результатов для круга и не сводятся друг к другу конформными отображениями.

2.1. (а). Обозначим $G^+=\{w:\operatorname{Re}w>0\}$, и пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$—произвольная последовательность комплексных чисел из $G^{(+)}$. Для произвольного целого $j\geq 1$ обозначим через s_j, кратность появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_k\}_1^j$, а через p_j—кратность появления числа λ_j во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$.

Пусть, далее, $B(w)$—сходящееся произведение Бляшке для полуплоскости $G^{(+)}$ с нулями $\{\lambda_k\}_1^\infty$.

Наряду с $\{\lambda_k\}_1^\infty$ рассмотрим последовательность $\{w_n\}_1^\infty$ попарно различных точек этой последовательности, расположенных так, что

$$\frac{\operatorname{Re}w_{n_1}}{1+|w_{n_1}|^2}\geq\frac{\operatorname{Re}w_{n_2}}{1+|w_{n_2}|^2},\qquad n_1<n_2.$$

Рассмотрим аналитические и ограниченные в $G^{(+)}$ функции

$$F_n(w)=\exp\left\{-\sum_{j\geq n}\frac{\operatorname{Re}w_j}{1+|w_j|^2}\cdot\frac{1+w\overline{w}_j}{w+\overline{w}_j}\right\}\quad(n\geq 1),$$

$$F(w;\lambda_k)=F_n(w)\left(\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{1+\lambda_k}\cdot\frac{w+1}{w+\overline{\lambda}_k}\right)^2,\ \text{при } \lambda_k=w_n.$$

(б). Введем в рассмотрение последовательности $\{\Omega_k(w)\}_1^\infty$ аналитических и ограниченных в $G^{(+)}$ функций, положив

$$\Omega_k(w)=\frac{F(w;\lambda_k)B(w)}{(s_k-1)!(w-\lambda_k)^{p_k}}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu(\lambda_k)(w-\lambda_k)^{\nu+s_k-1}\ (k\geq 1),$$

$$a_\nu(\lambda_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dw^\nu}\left\{\frac{(w-\lambda_k)^{p_k}}{B(w)F(w;\lambda_k)}\right\}_{w=\lambda_k}\ (0\leq\nu<+\infty;\ k\geq 1).$$

Лемма 1. *Функции системы $\{\Omega_k(w)\}_1^\infty$ обладают следующими интерполяционными свойствами: $\Omega_k^{(s_j-1)}(\lambda_j)=\delta_{kj}$ $(k, j=1, 2, \ldots)$, где δ_{kj}—символ Кронекера.*

(в). Пусть $\varkappa\equiv\{\varkappa_k\}_1^\infty$—последовательность положительных чисел.

Обозначим через $l^\infty\{\varkappa_k\}$ банахово пространство всевозможных последовательностей комплексных чисел $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию $\sup\limits_k\{\varkappa_k|\gamma_k|\}<+\infty$.

Теорема 1. *Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$—последовательность комплексных чисел из $G^{(+)}$ и $\sup\limits_{k\geq1}\{p_k\}<+\infty$. Тогда:*

1°: *Для справедливости равенства*

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f\in H^\infty[G^{(+)}]\}=l^\infty\{(\mathrm{Re}\lambda_k)^{s_k-1}\}$$

необходимо и достаточно условие

$$\inf_{k\geq1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_k}}^\infty\left|\frac{\lambda_j-\lambda_k}{\lambda_j+\bar{\lambda}_k}\right|\right\}>0. \tag{3}$$

2°. *Если выполняется условие* (3) *и* $\{\gamma_k\}_1^\infty\in l^\infty\{(\mathrm{Re}\lambda_k)^{s_k-1}\}$—*—произвольная последовательность комплексных чисел, то ряд*

$$f(w)=\sum_{k=1}^\infty\gamma_k\Omega_k(w),\quad \mathrm{Re}\,w>0$$

сходится абсолютно и равномерно внутри полуплоскости $G^{(+)}$ и определяет функцию $f\in H^\infty[G^{(+)}]$, удовлетворяющую следующим интерполяционным данным: $f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=\gamma_k$ $(k=1, 2, \ldots)$.

3.1. (а). Пусть $0<h<+\infty$ и $S_h=\{z:|\mathrm{Im}z|<h\}$, а $\{\alpha_k\}_1^\infty$—произвольная последовательность комплексных чисел из полосы S_h. Для произвольного целого $j\geq1$ обозначим через s_j кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_1^j$, а через p_j—кратность появления числа α_j во всей последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$.

Пусть, далее, $B_h(z)=\prod\limits_{k=1}^\infty\dfrac{e^{\pi z/(2h)}-e^{\pi\alpha_k/(2h)}}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi\bar{\alpha}_k/(2h)}}\cdot\dfrac{|1-e^{\pi\alpha_k/h}|}{1-e^{\pi\alpha_k/h}}$—сходящееся при условии $\sum\limits_{k=1}^\infty\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2h}\mathrm{Im}\,\alpha_k\right)}{ch\left(\dfrac{\pi}{2h}\mathrm{Re}\,\alpha_k\right)}<+\infty$ произведение Бляшке для полосы S_h.

(б). Наряду с $\{\alpha_k\}_1^\infty$ будем рассматривать последовательность $\{z_n\}_1^\infty$ попарно различных точек этой последовательности, расположенных так, что

$$\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2h}\mathrm{Im}\,z_{n_1}\right)}{\mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi}{2h}\mathrm{Re}\,z_{n_1}\right)}\geq\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2h}\mathrm{Im}\,z_{n_2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi}{2h}\mathrm{Re}\,z_{n_2}\right)},\quad n_1<n_2.$$

Рассмотрим функции

$$\tilde{F}_n(z)=\exp\left\{-\sum_{j\geq n}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2h}\mathrm{Im}\,z_j\right)}{\mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi}{2h}\mathrm{Re}\,z_j\right)}\cdot\frac{1+e^{\pi z/(2h)}e^{\pi\bar{z}_j/(2h)}}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi\bar{z}_j/(2h)}}\right\}\quad(n\geq1),$$

$$\tilde{F}(z;\ \alpha_k)=\tilde{F}_n(z)\left(\frac{\mathrm{Re}\,e^{\pi\alpha_k/(2h)}}{1+e^{\pi\alpha_k/(2h)}}\cdot\frac{1+e^{\pi z/(2h)}}{e^{\pi z/(2h)}+e^{\pi\bar{\alpha}_k/(2h)}}\right)^2 \text{ при } \alpha_k=z_n.$$

Введем, наконец, в рассмотрение последовательность $\{\tilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ аналитических и ограниченных в полосе S_h функций, положив

$$\tilde{\Omega}_k(z)=\frac{\tilde{F}(z;\ \alpha_k)B_h(z)}{(s_k-1)!(z-\alpha_k)^{p_k}}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\tilde{a}_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^{\nu+s_k-1},\quad (k\geqslant 1)$$

$$\tilde{a}_\nu(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{(z-\alpha_k)^{p_k}}{B_h(z)\tilde{F}(z;\ \alpha_k)}\right\}_{z=\alpha_k}\ (0\leqslant\nu<+\infty;\quad k\geqslant 1).$$

Лемма 2. *Функции системы* $\{\tilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ *обладают следующими интерполяционными свойствами:* $\tilde{\Omega}_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\delta_{kj}$ $(k,\ j=1,\ 2,\ \ldots)$

Теорема 2. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty$*—последовательность комплексных чисел из* S_h *и* $\sup\limits_{k\geqslant 1}\{p_k\}<+\infty$. *Тогда:*

1°. *Для справедливости равенства*

$$\{(f^{(s_k-1)}(\alpha_k))_{k=1}^\infty : f\in H^\infty[S_h]\}=l^\infty\left\{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\alpha_k\right)\right]^{s_k-1}\right\}$$

необходимо и достаточно условие

$$\inf_{k\geqslant 1}\left|\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{4h}(\alpha_k-\alpha_j)\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{4h}(\alpha_k-\overline{\alpha}_j)\right)}\right|\right|>0. \tag{4}$$

2°. *Если имеет место условие* (4) *и* $\{\gamma_k\}_1^\infty\in l^\infty\left\{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\alpha_k\right)\right]^{s_k-1}\right\}$*— произвольная последовательность комплексных чисел, то ряд*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\tilde{\Omega}_k(z),\quad z\in S_h$$

сходится абсолютно и равномерно внутри полосы S_h *и определяет функцию* $f\in H^\infty[S_h]$, *удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:* $f^{(s_k-1)}(\alpha_k)=\gamma_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$

Автор приносит благодарность академику АН АрмССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство при выполнении данной работы.

Ереванский государственный университет

Կ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի էֆեկտիվ լուծումը կիսահարթության ու շերտի H^∞ դասերում

Օգտագործելով Մ. Մ. Ջրբաշյանի բիօրթոգոնալիզացիայի մեթոդը, աշխատանքում տրվում է բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի էֆեկտիվ լուծումը կիսահարթությունում ու շերտում սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների դասերում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, № 5 (1974). [2] *Г. М. Айрапетян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 10, № 2 (1975). [3] *В. М. Мартиросян*, ДАН АрмССР, т. 63, № 5 (1976). [4] *Ф. А. Шамоян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 11, № 2 (1976). [5] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 234, № 3 (1977); Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 43, № 6 (1978). [6] *Г. М. Айрапетян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 12, № 4 (1977). [7] *А. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 234, № 6 (1977). [8] *В. М. Мартиросян*. Изв. АН АрмССР. Математика, т. 13, № 5—6 (1978); ДАН СССР, т. 245, № 1 (1979). [9] *С. А. Виноградов, Е. А. Горин, С. В. Хрущев*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 113, № 11 (1981). [10] *В. М. Мартиросян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 16, № 5 (1981), ДАН СССР, т. 263, № 4 (1982).