ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIX 1984 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

А. Л. Григорян

Приближение функций дискретными суммами Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 28/III 1984)

Пусть $r\in\mathbf{N}$ и $W^r(C)$ (соответственно $W^r(L)$)—класс непрерывных (суммируемых) 2π-периодических функций, у которых существует абсолютно непрерывная $(r-1)$-я производная

$$f^{(r-1)}(x) \text{ и } \|f^{(r)}(x)\|_C=\sup_x|f^{(r)}(x)|\leqslant 1 \quad (\|f^{(r)}(x)\|_L\leqslant 1).$$

Пусть $S_m(W^r)_X=\sup\limits_{f\in W^r(X)}\|f-s_{m-1}(f)\|_X$,

где $s_{m-1}(f)$—частичные суммы порядка $m-1$ ряда Фурье функций $f(x)$, а X есть C или L.

Как хорошо известно, А. Н. Колмогоров (1) для $X=C$ и С. М. Никольский (2) для $X=L$ доказали, что

$$S_m(W^r)_X=\frac{4}{\pi^2}\,\frac{\ln m}{m^r}+O_r\left(\frac{1}{m^r}\right).$$

В дальнейшем исследования А. Н. Колмогорова были продолжены В. Т. Пинкевичем (3), С. М. Никольским (4,5), А. В. Ефимовым (6), С. А. Теляковским (7,8), С. Б. Стечкиным (9) и другими авторами.

Пусть $q\in\mathbf{N}$. Рассмотрим в q-мерном комплексном евклидовом пространстве ортогональную систему векторов:

$$e_k=\{e^{2\pi ikl/q}\}_{l=0}^{q-1},\quad k\in\overline{-\left[\frac{q-1}{2}\right],\left[\frac{q}{2}\right]}.$$

Тогда, если на сетке $\left\{\frac{2\pi l}{q}\right\}_{l=0}^{q-1}$ задана функция $f=\left\{f\left(\frac{2\pi l}{q}\right)\right\}_{l=0}^{q-1}$,

$$\text{то}\quad f=\sum_{k=-\left[\frac{q-1}{2}\right]}^{\left[\frac{q}{2}\right]}c_ke_k,$$

$$\text{где}\quad c_k=\frac{1}{q}\sum_{l=0}^{q-1}f\left(\frac{2\pi l}{q}\right)\cdot e^{-2\pi ikl/q},$$

$$\text{а}\quad s_{m-1}(f)=\sum_{k=-(m-1)}^{m-1}c_ke_k$$

—частичная сумма дискретного ряда Фурье функции f.

Обозначим $W_C^r(q)$ (соответственно $W_L^r(q)$)—класс 2π-периодических функций f, заданных на сетке $\left\{\frac{2\pi l}{q}\right\}_{l=0}^{q-1}$, таких, что

$$\left\|\Delta^r_{\frac{2\pi}{q}} f\left(\frac{2\pi l}{q}\right)\right\|_C = \max_l \left|\Delta^r_{\frac{2\pi}{q}} f\left(\frac{2\pi l}{q}\right)\right| \leqslant \left(\frac{2\pi}{q}\right)^r,$$

$$\left(\left\|\Delta^r_{\frac{2\pi}{q}} f\left(\frac{2\pi l}{q}\right)\right\|_L = \frac{1}{q}\sum_{l=0}^{q-1} \left|\Delta^r_{\frac{2\pi}{q}} f\left(\frac{2\pi l}{q}\right)\right| \leqslant \left(\frac{2\pi}{q}\right)^r\right).$$

и положим $C^r_m(q)_X = \sup_{f\in W^r_X(q)} \|f - s_{m-1}(f)\|_X$, $\left(1\leqslant m \leqslant \left[\frac{q}{2}\right]\right)$.

В работе исследуется поставленная автору С. Б. Стечкиным задача об изучении поведения $C^r_m(q)_X$. Оказалось, что при фиксированном r и $m\leqslant\left[\frac{q}{2}\right]$ $C^r_m(q)_X$ имеет такой же порядок, что и $S_m(W^r)_X$, а при $m\to\infty$ они имеют разные асимптотики. Для решения поставленной задачи необходимо знать поведение констант

$$L_m(q) = \frac{1}{q}\sum_{l=0}^{q-1} \frac{|\sin \pi ml/q|}{\sin \pi l/q},$$

$$L'_m(q) = \frac{1}{q}\sum_{l=\left[\frac{q}{m}\right]}^{q-\left[\frac{q}{m}\right]} \frac{\left|\cos \pi m\left(l+\frac{1}{2}\right)/q\right|}{\sin \pi\left(l+\frac{1}{2}\right)/q}, \quad (m,\ q\in \mathbf{N},\quad m<q).$$

Константы $L_m(q)$ изучены в работе автора ([10]). Для константы $L'_m(q)$ доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Для всех $m\in\mathbf{N}$ справедливы оценки*

$$\frac{1}{\pi}\ln\tau + O(1) < L'_m(q) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi}\ln\tau + O(1),$$

где $\tau = \min(m,\ q-m)+1$. Оценка сверху точна:

$$L'_m(2m) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\ln m + O(1).$$

Теорема 2. *Пусть $m_n,\ q_n\in\mathbf{N}$, $m_n<q_n$, $\tau_n = \min(m_n,\ q_n-m_n)+$ $+1\to\infty$, $m_n/q_n\to\alpha\in[0,\ 1]$ при $n\to\infty$. Тогда*

а) *для иррациональных α и для $\alpha=0;\ 1$ имеем*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L'_{m_n}(q_n)}{\ln \tau_n} = \frac{4}{\pi^2};$$

б) *если $\alpha = m/q\neq 0;\ 1$, $(m,\ q)=1$, то*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{L'_{m_n}(q_n)}{\ln\tau_n} = h_1 = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi q}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2q} & \text{при } m+q\equiv 0 \pmod 2\\[2mm] \dfrac{4}{\pi^2} & \text{при } m+q\equiv 1 \pmod 2,\end{cases}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{L'_{m_n}(q_n)}{\ln\tau_n} = H_1 = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi^2} & \text{при } m+q\equiv 0 \pmod 2\\[2mm] \dfrac{2}{\pi q \sin \pi/2q} & \text{при } m+q\equiv 1 \pmod 2.\end{cases}$$

Кроме того, для любого $\gamma\in[h_1, H_1]$ *существует последовательность* $m'_n/q'_n\to\frac{m}{q}$ *такая, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Lm'_n(q'_n)}{\ln\tau'_n}=\gamma$.

Верны следующие теоремы.

Теорема 3. *Существуют* $d_1(r)>0$, $d_2(r)>0$ *такие, что равномерно по* m *и* q, $1\leqslant m\leqslant\left[\frac{q}{2}\right]$, *верны оценки*

$$d_1(r)\cdot\frac{\ln\tau}{m^r}\leqslant C_m^r(q)_x\leqslant d_2(r)\cdot\frac{\ln\tau}{m^r},$$

где $\tau=\min(2m-1,\ q-2m+1)+1$.

Теорема 4. *Пусть* $m_n, q_n\in\mathrm{N}$, $1\leqslant m_n\leqslant\left[\frac{q_n}{2}\right]$,

$\tau_n=\min(2m_n-1,\ q_n-2m_n+1)+1\to\infty$, $(2m_n-1)/q_n\to\alpha\in[0, 1]$ при $n\to\infty$,

$$Y_n=C_{m_n}^r(q_n)_x\Big/\left(\left(\frac{\pi\alpha/2}{\sin\pi\alpha/2}\right)^r\cdot m_n^{-r}\cdot\ln\tau_n\right),$$

$$r\equiv i(\mathrm{mod}2),\ i=0 \text{ или } i=1.$$

Тогда

а) *если* α—*иррациональное или* $\alpha=0;\ 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=\frac{4}{\pi^2}$.

б) *если* $\alpha=m/q\in(0, 1)$, $(m, q)=1$, *то*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}Y_n=h_i,\quad \overline{\lim}_{n\to\infty}Y_n=H_i;$$

$$\text{где } h_0=\frac{2}{\pi q}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2q},\qquad H_0=\frac{4}{\pi^2},$$

а h_1 *и* H_1 *определены в формулировке теоремы* 3.

Кроме того, для любого $\gamma\in[h_i, H_i]$, *где* $i=0$ *при* $r\equiv0(\mathrm{mod}2)$ *и* $i=1$ *при* $r\equiv1(\mathrm{mod}2)$, *существует последовательность* $m'_n/q'_n\to m/q$ *такая, что* $\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=\gamma$.

Автор благодарит С. Б. Стечкина за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ա. Լ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ֆունկցիաների մոտարկումը Ֆուրյեի դիսկրետ գումարներով

Նշանակենք $W_C^r(q)$ *(համապատասխանաբար* $W_L^r(q)$*)* 2π*-պարբերական* f *ֆունկցիաների դասը, որոնք տրված են* $\left\{\frac{2\pi l}{q}\right\}_{l=0}^{q-1}$ *ցանցի վրա և բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝*

$$\left\|\Delta^r_{\frac{2\pi}{q}} f\left(\frac{2\pi l}{q}\right)\right\|_C = \max_l \left|\Delta^r_{\frac{2\pi}{q}} f\left(\frac{2\pi l}{q}\right)\right| \leqslant \left(\frac{2\pi}{q}\right)^r,$$

$$\left(\left\|\Delta^r_{\frac{2\pi}{q}} f\left(\frac{2\pi l}{q}\right)\right\|_L = \frac{1}{q} \sum_{l=0}^{q-1} \left|\Delta^r_{\frac{2\pi}{q}} f\left(\frac{2\pi l}{q}\right)\right| \leqslant \left(\frac{2\pi}{q}\right)^r\right),$$

և դիտենք՝

$$C^r_m(q)_X = \sup_{f \in W^r_X(q)} \|f - s_{m-1}(f)\|_X.$$

Աշխատանքում ձևակերպված են երկու պնդումներ $C^r_m(q)_X$ *մեծության կարգի և ասիմպտոտիկայի մասին:*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. N. Kolmogoroff*, Ann. of Math. v. 36, №2 (1935). [2] *С. М. Никольский*, Изв. АН СССР, т. 10, № 3 (1946). [3] *В. Т. Пинкевич*, Изв. АН СССР, т. 4, № 6 (1940). [4] *С. М. Никольский*, ДАН СССР, т. 32, № 6 (1941). [5] *С. М. Никольский*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, вып. 15 (1945). [6] *А. В. Ефимов*, Изв. АН СССР, т. 24, № 2 (1960). [7] *С. А. Теляковский*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, вып. 62 (1961). [8] *С. А. Теляковский*, Мат. заметки, т. 4, № 3 (1968). [9] *С. Б. Стечкин*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, вып. 145 (1980). [10] *А. Л. Григорян*, Мат. заметки, т. 34, № 6 (1983).