УДК 517.5

В. М. Манукян

О подсистеме функций Уолша, являющейся системой представления

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 24/VI 1983)

Определение 1. Система функций $\{\varphi_n(x)\}$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется системой представления в классе измеримых, почти везде конечных на $[a, b]$ функций, если для произвольной почти везде конечной измеримой функции $f(x)$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

который почти всюду на отрезке $[a, b]$ сходится к $f(x)$.

Вопрос, является ли тригонометрическая система системой представления в классе почти везде конечных измеримых функций, был положительно решен Д. Е. Меньшовым (1).

Для системы Уолша этот вопрос рассматривался Р. С. Давтяном (2), Ф. Г. Арутюняном (3). Последним, в частности, в одной из неопубликованных работ получен результат, который нам понадобится в дальнейшем, так что сформулируем его и приведем краткую схему доказательства.

Теорема А. Подсистема Уолша $\{\omega_{n_k+i}(x)\}_{i=0}^{m_k}$ ($k \geq 1$), где $n_k + m_k \leq n_{k+1}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \infty$, является системой представления в классе всех почти везде конечных измеримых функций.

Утверждение этой теоремы следует из того, что если $\{\omega_i(x)\}_{i=1}^n$ система Уолша (4), $\{\omega_i(x)\}_{i=2^m+1}^{2^m+1}$ ее «естественная пачка», $2n+1 \geq 2^m+1$, $2n+2^k \leq 2^{m+1}$, то для произвольного интервала $\left(\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right)$ ($1 \leq j \leq 2^k$) и числа $\sigma > 0$ можно подобрать такой набор

чисел $\varepsilon_i = 0$ или 1, что многочлен $P_j^{(k)}(x) = \frac{\sigma}{2^k} \sum_{i=2n+1}^{2n+2^k} \varepsilon_i \omega_i(x)$ удовлет-

воряет следующим условиям:

$$1. \quad P_j^{(k)}(x) = \begin{cases} \sigma & \text{при } x \in E' \subset \left(\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right) \\ -\sigma & \text{при } x \in E'' \subset \left(\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right) \end{cases}$$

$$\mu E' = \mu E'' = \frac{1}{2^{k+1}};$$

$$2. \quad \sup_{2n+1 \leq l \leq 2n+2^k} \left| \frac{\sigma}{2^k} \sum_{i=2n+1}^l \varepsilon_i \omega_i(x) \right| \leq \sigma \text{ на отрезке } [0, 1].$$

Из этого следует, что подсистема Уолша, указанная в теореме А, является системой функций типа (X), значит, и системой представления (3).

В данной работе рассматривается вопрос, будет ли подсистема Уолша системой представления, если функции выбраны «далеко» друг от друга.

Прежде чем перейти к точным формулировкам, введем некоторые обозначения. Как известно, существуют разные нумерации системы Уолша (5); мы будем пользоваться нумерацией Уолша—Пэли (при этом не очень заботясь о значении функций в двоично-рациональных точках, так как нас интересует сходимость почти всюду).

Определение 2. Последовательность ортонормированных матриц A_k определим следующим образом: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, и если i -тую строчку матрицы A_k обозначим через $a_i^{(k)} = (a_{i1}^{(k)}, a_{i2}^{(k)}, \dots, a_{i2^k}^{(k)})$, то

$$\begin{aligned} a_{2i-1}^{(k+1)} &= (a_i^{(k)}, a_i^{(k)}) \\ a_{2i}^{(k+1)} &= (a_i^{(k)}, -a_i^{(k)}) \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, 2^k. \quad (1)$$

Матрицы A_k ($k=1, 2, \dots$) состоят из 1 и -1 , ортонормированы, значит, $\det A_k \neq 0$.

Определение 3. Если $\varphi(x)$ некоторая функция, определенная на отрезке $[0, 1]$, а $a_i^{(k)}$ i -тая строчка матрицы A_k , то обозначим:

$$a_i^{(k)} \circ \varphi(x) = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} \varphi(2^k x - j + 1) & \text{при } x \in \left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right) \quad j=1, 2, \dots, 2^k. \\ 0 & \text{при } x=1 \end{cases} \quad (2)$$

Через $A_k \circ \varphi(x)$ будем обозначать пачку из 2^k функций, где на i -том месте стоит функция $a_i^{(k)} \circ \varphi(x)$.

Определение 4. Систему Уолша $\{\omega_i(x)\}_{i=1}^\infty$ определим следующим образом:

$$\omega_1(x) \equiv 1 \text{ на отрезке } [0, 1] \quad \omega_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{2} \right) \\ -1 & \text{при } x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right) \\ 0 & \text{в остальных точках;} \end{cases}$$

если уже определены первые 2^k функций, то следующие 2^k функций определим следующим образом:

$$\omega_{2^k+i}(x) = a_i^{(k)} \circ \omega_2(x) \quad i=1, 2, 3, \dots, 2^k.$$

Нетрудно заметить, что таким образом определенная система Уолша совпадает с определением, данным в (4) (см. с. 155).

Теорема 1. Если систему Уолша разбить на пачки, содержащие по n элементов, то из каждой пачки можно выбрать по одной функции так, чтобы подсистема Уолша, составленная из

них, была системой представления в классе почти везде конечных измеримых функций.

Лемма 1.1. Если систему Уолша разбить на пачки, содержащие по 2^k функций, то i -тая пачка совпадает с $A_k \circ \psi_i(x)$.

Лемма 1.2. Если систему Уолша разбить на пачки, содержащие по 2^k элементов; $\{n_j\}_{j=0}^{\infty}$ такая последовательность натуральных чисел, что $n_0=0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} (n_{j+1} - n_j) = +\infty$; в пачках с номерами $n_j+2, n_j+3, \dots, n_{j+1}$ выбрана функция, имеющая относительно пачки один и тот же номер $p=j+1 \pmod{2^k}$, тогда множество всех выбранных функций составит систему представления в классе всех почти везде конечных измеримых функций.

Теорема 1 непосредственно следует из предыдущей леммы.

Замечание 1. Пользуясь методами, разработанными в работах (3,6) для произвольной функции $F(x) \in L_p$, можно составить ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x), \quad (3)$$

где $\{\varphi_i(x)\}$ подсистема Уолша, указанная в теореме 1 так, чтобы ряд (3) сходил к функции $F(x)$ почти всюду и одновременно

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x) = F(x) \text{ в пространстве } L_p.$$

Через $S[0, 1]$ будем в дальнейшем обозначать пространство сходимости по мере.

Теорема 2. Если систему Уолша разбить на пачки, содержащие по n элементов, то из каждой пачки можно выбрать по одной функции так, чтобы и выбранная подсистема Уолша, и оставшаяся подсистема были незамкнуты в пространстве $S[0, 1]$.

Лемма 2.1. Если дан некоторый набор чисел $\{\alpha_j\}_{j=1}^{2^k}$, не равных одновременно нулю, то множество всех функций $\{\psi(x)\} \subset S[0, 1]$, удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{j=1}^{2^k} \alpha_j \psi\left(x + \frac{j-1}{2^k}\right) \equiv 0 \text{ почти всюду на } \left(0, \frac{1}{2^k}\right), \quad (4)$$

не плотно в пространстве $S[0, 1]$.

Лемма 2.2. Если из системы Уолша выбросить арифметическую прогрессию с разностью $d=2^k$ ($k \geq 1$), то система оставшихся функций будет незамкнутой в пространстве $S[0, 1]$.

Замечание 2. Утверждение леммы останется в силе, если выбрасывать арифметическую прогрессию с разностью 2^k ($k \geq 1$), начиная с некоторого места.

Утверждение теоремы 2 непосредственно следует из предыдущей леммы.

В заключение автор выражает благодарность Ф. Г. Арутюняну за постановку задачи и ценные советы.

Ուղղի ենթահամակարգի մասին, որը հանդիսանում է ներկայացման
համակարգ

Տվյալ աշխատանքում ապացուցվում են երկու թեորեմ.

Թեորեմ 1. Եթե Ուղղի համակարգը տրոհենք հաջորդաբար խմբերի, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է // էլեմենտ, ապա ամեն մի խմբից կարելի է ընտրել մեկական ֆունկցիա այնպես, որ այդ ընտրված ենթահամակարգը լինի ներկայացման համակարգ չափելի հ. ա. վերջավոր ֆունկցիաների դասում:

Թեորեմ 2. Եթե Ուղղի համակարգը տրոհենք հաջորդաբար խմբերի, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է // էլեմենտ, ապա ամեն մի խմբից կարելի է ընտրել մեկական ֆունկցիա այնպես, որ այդ ընտրված ենթահամակարգը չլինի փակ $S [0,1]$ տարածությունում:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ Д. Е. Меньшов, Мат. сб., т. 9(51) (1941). Р. С. Давтян, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, т. 6, № 1 (1971). ² Ф. Г. Арутюнян, Мат. сб., т. 90(132), № 4 (1973). ³ С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, Физматгиз, М., 1958. ⁴ Л. А. Балашов, А. И. Рубинштейн, в сб.: Итоги науки. Сер. мат. Математический анализ, 1970; М., ВИНТИ, 1971. ⁵ А. А. Талалян, Acta Math. Academ. Sci. Hungar., 21, № 1—2 (1970).