ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 4

УДК 517.95

МАТЕМАТИКА

З. А. Арушанян, Б. В. Григорян

Об одном обобщении теоремы Рудина—Карлесона

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 20/V 1983)

1. Известная теорема Рудина—Карлесона (см. ([1]), с. 117) в терминах вещественных функций (в полуплоскости) утверждает, что любую пару непрерывных функций (f_1, f_2), сосредоточенных на произвольном замкнутом множестве $E\subset \mathbf{R}^1$ меры нуль, можно продолжить до некоторого непрерывного и ограниченного в замкнутой верхней полуплоскости решения $F=(U_1, U_2)$ уравнения Коши—Римана

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}=0. \tag{1}$$

Утверждение теоремы остается в силе, если уравнение (1) заменить так называемым обобщенным уравнением Коши—Римана (т. е. уравнением $G_y+AG_x=0$, любое решение которого состоит только из гармонических компонент), так как любое решение G такого уравнения можно представить в виде $G=T\cdot F$, где T фиксированная обратимая матрица второго порядка, а F некоторое решение уравнения (1) (см. ([2]), с. 260).

2. Формулировка основного результата. Дифференциальный оператор с матричными коэффициентами k-тых порядков $\Lambda=A\dfrac{\partial}{\partial x}+B\dfrac{\partial}{\partial y}+C\dfrac{\partial}{\partial z}$, следуя Стейну, назовем обобщенным оператором Коши—Римана (в $\mathbf{R}^3$), если любое решение G уравнения $\Lambda G=0$ состоит только из гармонических компонент. Определения ОКР-оператора в общем случае см. в ([2]) (с. 258).

Теорема. *Любую вектор-функцию, сосредоточенную на произвольном замкнутом множестве $E\subset\mathbf{R}^2$ плоской меры нуль, можно продолжить до некоторого непрерывного и ограниченного в* $\mathbf{R}^3_+=\{(x, y, z): z>0\}$ *решения* $G=(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ ОКР-уравнения $\Lambda G=0$.

С помощью некоторых алгебраических соображений можно доказать, что если $G=(V_1, V_2, \ldots, V_k)$—решение ОКР-уравнения $\Lambda G=0$, то 1) $k=4p$; 2) существуют обратимые матрицы четвертых порядков $T_1, T_2, \ldots, T_p$ (зависящие только от ОКР-оператора Λ), и, если $G_j=(V_{4j-3}, \ldots, V_{4j})$ $(j=1, 2, \ldots, p)$, то $G_j=T_j\cdot F_j$, где $F_j=(U^j_1, U^j_2, U^j_3, U^j_4)$—некоторые решения следующей специальной ОКР-системы уравнений (в чем легко убедиться непосредственной проверкой):

$$\frac{\partial U_1}{\partial z}=-\frac{\partial U_2}{\partial x}+\frac{\partial U_4}{\partial y} \quad \frac{\partial U_2}{\partial z}=\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_3}{\partial y};$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial z}=\frac{\partial U_4}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y} \quad \frac{\partial U_4}{\partial z}=-\frac{\partial U_3}{\partial x}-\frac{\partial U_1}{\partial y}, \tag{2}$$

которая является одним из наиболее естественных обобщений классической системы Коши—Римана (1) в трехмерном пространстве.

Из этого утверждения следует, что, не умаляя общности, достаточно доказать теорему только для решений ОКР-уравнения (2). Доказательство же последнего основано на следующей лемме, являющейся некоторым обобщением (в $\mathbf{R}^3$) классической теоремы братьев Ф. и М. Риссов (см. ([1]), с. 73).

Определение. *Пусть* $A(\overline{\mathbf{R}^3_+})$—*множество непрерывных и ограниченных решений ОКР-системы* (2) *в* $\overline{\mathbf{R}^3_+}$, *а* $A(\mathbf{R}^2)$—*множество тех непрерывных функций на* $\mathbf{R}^2$, *стремящихся к нулю при* x^2+ $+y^2\to\infty$, *которые являются следами функций из класса* $A(\overline{\mathbf{R}^3_+})$.

Лемма. *Пусть* $\mu=(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$—*конечная вектор-мера на* $\mathbf{R}^2$, *и*

$$\int F\cdot d\mu=\int\sum_{j=1}^{4}U_j d\mu_j=0 \quad \forall F\in A(\mathbf{R}^2). \tag{3}$$

Тогда $d\mu_j=h_j dxdy$, *где* $h_j\in L_1(\mathbf{R}^2)$ $\forall_{j=1,2,3,4}$.

3. Доказательство леммы. Из результатов, изложенных на с. 256 монографии ([2]) (см. теоремы 4.9, 4.2), в частности, следует такое утверждение.

У) Если $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ такие конечные борелевские меры на $\mathbf{R}^2$, что их гармонические продолжения (U_1, U_2, U_3, U_4) на $\mathbf{R}^3_+$ удовлетворяют ОКР-системе уравнений (2), то все эти меры абсолютно непрерывны относительно плоской меры Лебега.

А теперь покажем, что из предположения (3) леммы следует, что меры $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ удовлетворяют условию вышеизложенного утверждения У).

Для любого элемента $(U_1, U_2, U_3, U_4)\in A(\mathbf{R}^2)$ нетрудно установить, что преобразования Фурье компонент этого элемента связаны на $\mathbf{R}^2$ следующими соотношениями:

$$-|\sigma|\hat{U}_1=-i\sigma_1\hat{U}_2+i\sigma_2\hat{U}_4; \quad -|\sigma|\hat{U}_2=i\sigma_1\hat{U}_1-i\sigma_2\hat{U}_3;$$

$$-|\sigma|\hat{U}_3=i\sigma_1\hat{U}_4+i\sigma_2\hat{U}_2; \quad -|\sigma|\hat{U}_4=-i\sigma_1\hat{U}_3-i\sigma_2\hat{U}_1. \tag{4}$$

С другой стороны, соотношению (3) (в терминах преобразований Фурье) с учетом равенств (4) можно придать следующий вид:

$$\left\langle i\frac{\sigma_1}{|\sigma|}\hat{\mu}_1-i\frac{\sigma_2}{|\sigma|}\hat{\mu}_3+\hat{\mu}_2,\ \hat{U}_2\right\rangle+\left\langle -i\frac{\sigma_1}{|\sigma|}\hat{\mu}_3-i\frac{\sigma_2}{|\sigma|}\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_4,\ \hat{U}_4\right\rangle=0;$$

$$\left\langle -i\frac{\sigma_1}{|\sigma|}\hat{\mu}_2+i\frac{\sigma_2}{|\sigma|}\hat{\mu}_4+\hat{\mu}_1,\ \hat{U}_1\right\rangle+\left\langle i\frac{\sigma_1}{|\sigma|}\hat{\mu}_4+i\frac{\sigma_2}{|\sigma|}\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_3,\ \hat{U}_3\right\rangle=0, \tag{5}$$

где $\langle\ldots\rangle$—билинейная форма, которую можно отождествить с некоторым элементом сопряженного пространства $L_1^*(\mathbf{R}^2)$, если ограничиться подпространством интегрируемых вектор-функций (U_1, U_2, U_3, U_4) из $A(\mathbf{R}^2)$. Но функции $\hat{U}_2, \hat{U}_4(\hat{U}_1, \hat{U}_3)$ независимо друг от друга могут пробегать все множество интегрируемых функций на $\mathbf{R}^2$; следовательно, все четыре первые аргумента билинейных форм, входящих в равенства (5), равны нулю. Это означает, что компоненты вектор-функций $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4)$ удовлетворяют соотношениям (4). Умножая эти соотношения на $\exp\{-2\pi z|\sigma|\}$ $(z>0)$ и делая обратное преобразование Фурье (по $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2)\in\mathbf{R}^2$), получим, что интегралы Пуассона конечных мер $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ удовлетворяют (на $\mathbf{R}_+^3$) ОКР-системе уравнений (2). Следовательно, меры $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ абсолютно непрерывны относительно меры Лебега, как это было указано в утверждении У в начале этого пункта. Лемма доказана.

4. Доказательство основной теоремы. Пусть $\mathbf{C}(E)$—пространство непрерывных вектор-функций (f_1, f_2, f_3, f_4) на нульмерном замкнутом множестве $E\subset\mathbf{R}^2$. Рассмотрим отображение $I: A(\mathbf{R}^2)\to\mathbf{C}(E)$, где $\forall F\in A(\mathbf{R}^2)$ $I(F)=F|_E$ (здесь $F|_E$—сужение непрерывной функции F на множество E). Нужно показать, что образ оператора I совпадает с пространством $\mathbf{C}(E)$. Но по теореме Банаха (см. ([3]), с. 116) $I[A(\mathbf{R}^2)]=\mathbf{C}(E)$ тогда и только тогда, когда для сопряженного оператора I^*, где $I^*: \mathbf{C}^*(E)\to A^*(\mathbf{R}^2)$, справедлива оценка снизу:

$$\|I^*\|_{A^*(\mathbf{R}^2)}\geqslant c\|\mu\|_{\mathbf{C}^*(E)} \ (c>0) \quad \forall\mu\in\mathbf{C}^*(E). \tag{6}$$

Для доказательства же соотношения (6) положим по определению $\Phi=I^*(\mu)$. Тогда по определению сопряженного оператора I^* $\forall F\in A(\mathbf{R}^2)$ получаем представление

$$\Phi(F)=\int_E I(F)d\mu=\int_{\mathbf{R}^2} F\cdot d\mu_E \quad (\text{где } \mu_E=\mu \text{ на } E \text{ и } \mu_E=0 \text{ вне } E). \tag{7}$$

Пусть $\mathbf{C}_0(\mathbf{R}^2)$—пространство непрерывных вектор-функций $G=(g_1, \ldots, g_4)$ на $\mathbf{R}^2$, которые стремятся к нулю в бесконечности. Воспользовавшись теоремой Хана—Банаха, функционал Φ можно продолжить из $A(\mathbf{R}^2)$ до линейного и ограниченного функционала $\tilde{\Phi}$ на всем $\mathbf{C}_0(\mathbf{R}^2)$ таким образом, чтобы: α) $\Phi(F)=\tilde{\Phi}(F)\forall F\in A(\mathbf{R}^2)$; β) $\forall G\in\mathbf{C}_0(\mathbf{R}^2)$ $\tilde{\Phi}(G)=\int Gd\tilde{\mu}$ для некоторой конечной меры $\tilde{\mu}$ на $\mathbf{R}^2$ такой, что γ) $\|\Phi\|_{A^*}=\|\tilde{\Phi}\|_{C_0^*}=\|\tilde{\mu}\|_{C_0^*}$. Из равенства α) с учетом (7) и β) получаем, что $\forall F\in A(\mathbf{R}^2)\int Fd(\tilde{\mu}-\mu_E)=0$, следовательно, $d\tilde{\mu}-d\mu_E=hdxdy$, где $h\in L_1(\mathbf{R}^2)$ (см. лемму). Далее, из последнего равенства и из γ) следует, что $\|I^*\|_{A^*}=\|\Phi\|_{A^*}=\|\tilde{\mu}\|_{C_0^*}=\|\mu_E+h\|_{C_0^*}\geqslant\|\mu_E\|_{C_0^*}=\|\mu\|_{C^*(E)}$. Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Զ. Ա. ԱՌՈՒՇԱՆՅԱՆ, Բ. Վ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ռուդին–Կառլեսոնի թեորեմի մի ընդհանրացման մասին

Այս աշխատանքում ապացուցվում է, որ երկչափ հարթության զրո չափի փակ բազմության վրա տրված յուրաքանչյուր անընդհատ քառաչափ վեկտոր-ֆունկցիա հանդիսանում է Կոշի-Ռիմանի ընդհանրացված հավասարման մի ինչ-որ, վերին փակ կիսատարածության մեջ անընդհատ և սահմանափակ լուծման հետք։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. Гофман*, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., 1975 [2] *И. Стейн, Г. Вейс*, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Мир, М., 1974. [3] *У. Рудин*, Функциональный анализ, Мир, М., 1975.