

УДК 539.377

МЕХАНИКА

С. М. Дургарьян

Термоустойчивость составного стержня

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 21/X 1983)

Рассматривается устойчивость шарнирно закрепленного по концам равномерно нагретого составного стержня (рис. 1) в предположении, что выпучивание обеих частей происходит в одной плоскости,

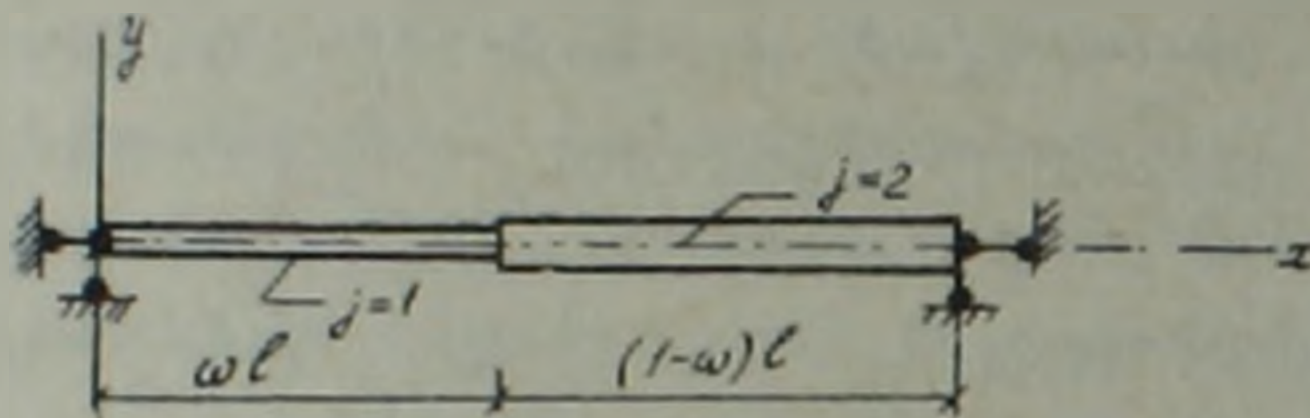


Рис. 1

а возникающие при этом критические напряжения не превосходят пределов пропорциональности используемых материалов.

Осевое сжимающее усилие, возникающее в результате повышения температуры, определяется по формуле

$$P = \frac{E_2 F_2 [\alpha_1 \omega + \alpha_2 (1 - \omega)]}{1 - \omega + \omega k^2 \delta} T, \quad (1)$$

где F_j — площадь поперечного сечения стержня; E_j и α_j — модуль упругости и коэффициент температурного расширения материала стержня, T — изменение температуры, имевшее место после закрепле-

ния стержня; $k^2 = \frac{E_2}{E_1}$; $\delta = \frac{F_2}{F_1}$.

Введя обозначения

$$n^2 = \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}, \quad \mu^2 = \frac{\alpha_1 \omega + \alpha_2 (1 - \omega)}{i_2^2 (1 - \omega + \omega k^2 \delta)} T, \quad i_j^2 = \frac{I_j}{F_j},$$

где I_j — минимальный момент инерции поперечного сечения стержня, уравнение устойчивости можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dx^2} + n^2 \mu^2 y_1 &= 0, & \omega l \geq x \geq 0; \\ \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \mu^2 y_2 &= 0, & l \geq x \geq \omega l. \end{aligned} \quad (2)$$

Проинтегрировав (2), будем иметь

$$y_1 = C_1 \sin n \mu x + C_2 \cos n \mu x; \quad y_2 = C_3 \sin \mu x + C_4 \cos \mu x,$$

где $C_1, \dots, C_4$ — постоянные интегрирования.

Удовлетворив условиям закрепления концевых сечений

$$y_1|_{x=0}=0; \quad y_2|_{x=l}=0,$$

а также условиям сопряжения двух частей составного стержня

$$y_1=y_2 \quad \text{и} \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx} \quad \text{при} \quad x=\omega l,$$

для определения значений постоянных интегрирования получим систему однородных алгебраических уравнений, ненулевое решение которой возможно только при равенстве нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} \sin n\mu\omega l & -\sin \mu\omega l & -\cos \mu\omega l \\ n\cos n\mu\omega l & -\cos \mu\omega l & \sin \mu\omega l \\ 0 & \sin \mu l & \cos \mu l \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Из (3) нетрудно получить трансцендентное уравнение

$$\sin n\mu\omega l \cdot \cos \mu(1-\omega)l + n\cos n\mu\omega l \sin \mu(1-\omega)l = 0, \quad (4)$$

отличный от нуля наименьший корень $\mu_{\min}$ которого позволит определить критическую температуру

$$T_{\text{кр}} = \frac{1-\omega + \omega k^2 \alpha_2}{\alpha_1 \omega + \alpha_2 (1-\omega)} l^2 \mu_{\min}^2, \quad (5)$$

при которой нагреваемый составной стержень потеряет устойчивость.

Из (4) и (5) ясно, что значение критической температуры от параметров задачи зависит весьма сложным образом. Эта сложная зависимость чрезвычайно упрощается, если рассматривается устойчивость однородного стержня постоянного поперечного сечения. В этом случае, приняв $\omega=0$ (или $\omega=1$, или $n=\delta=k=1$ и $\alpha_1=\alpha_2$), из (4) будем иметь

$$\sin \mu l = 0, \text{ а следовательно}$$

$$\mu_{\min} = \frac{\pi}{l}; \quad T_{\text{кр}} = \frac{\pi^2}{\alpha_2 \lambda_1^2},$$

где $\lambda_j = \frac{l}{l_j}$ — гибкость однородного стержня.

Как и следовало ожидать, критическая температура однородного стержня постоянного поперечного сечения не зависит от значения модуля упругости, а зависит только от гибкости стержня и коэффициента температурного расширения его материала.

В отличие от случая однородного стержня в задачах термоустойчивости составного стержня протяженности участков, занимаемых каждым из материалов (параметр ω), и отношение их модулей упругости (параметр k) могут явиться причиной не только значительных количественных изменений значений критической температуры, но и могут обусловить весьма существенные (порой даже принципиальные) качественные изменения в ее поведении.

В связи с невозможностью аналитического описания зависимости критической температуры от параметров ω и k особенности задачи термоустойчивости составного стержня исследуем на примерах стержней, изготовленных из стали ЭИ257 на участке $j=1$ и алюминиевого

сплава 2024—Т3 на участке $j=2$ (для краткости изложения эти материалы в дальнейшем будут называться соответственно сталью и алюминием) с характеристиками (^{1,2})

$$\begin{aligned} E_1 &= 20,40 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2; & E_2 &= 7,387 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2; \\ \alpha_1 &= 11,04 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}; & \alpha_2 &= 22,40 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

а также из гипотетических материалов, имеющих те же значения α_j , но иные отношения модулей упругости ($k=0,1; 0,5; 1,0; 1,662; 2,0; 10$).

При этом рассмотрим составные стержни постоянного прямоугольного поперечного сечения ($\delta=1$, $n=k$), приняв $l=100\text{ см}$, $i_j^2=1/3\text{ см}^2$.

На рис. 2 приведены кривые зависимости $T_{кр}=f(\omega)$, соответствующие различным значениям параметра k . Из этих кривых видно,

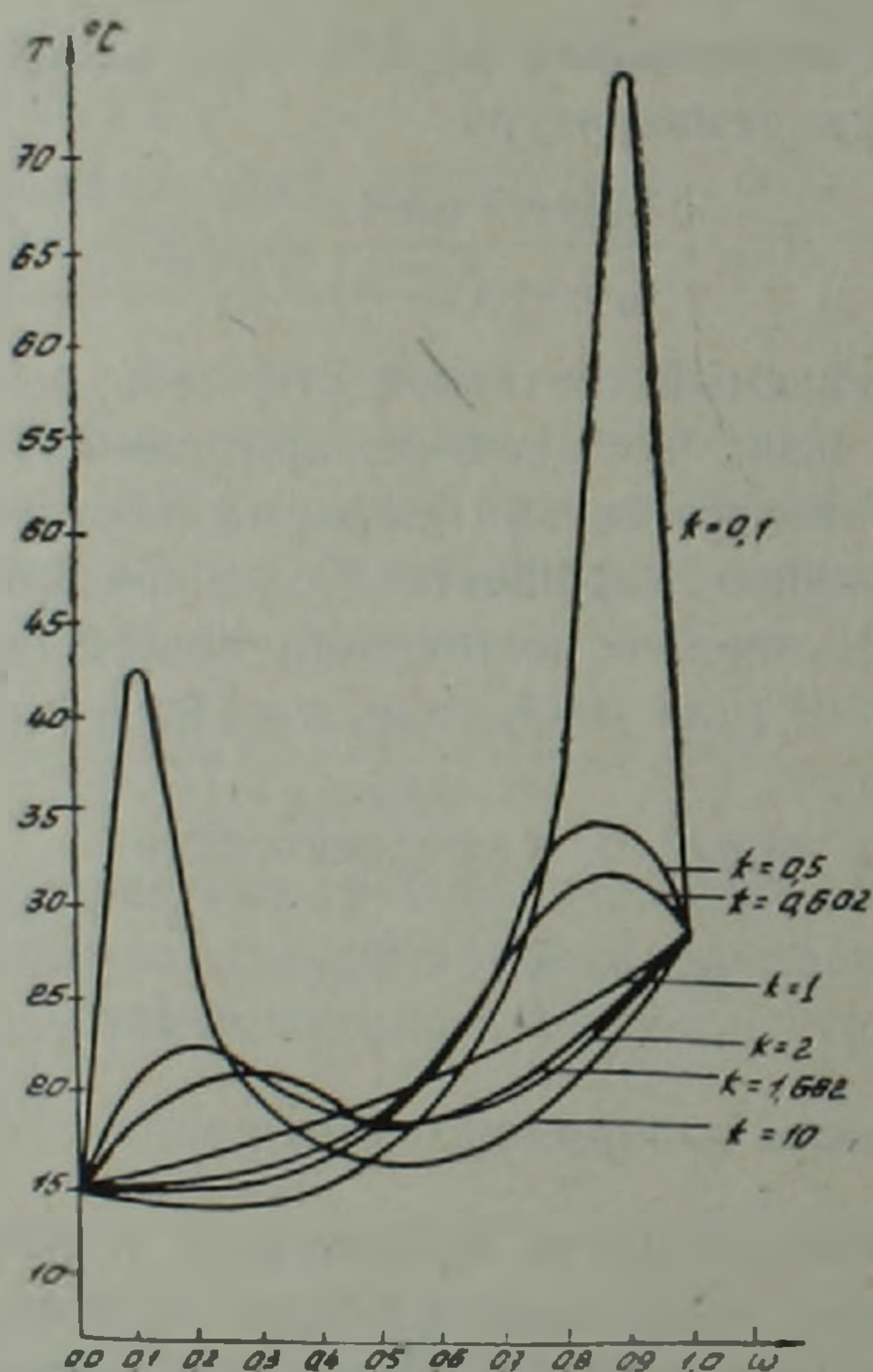


Рис. 2

что функция $T_{кр}=f(\omega)$ в интервале $1 \geq \omega \geq 0$ может иметь экстремальные значения, т. е. изменением месторасположения границы раздела материалов составного стержня можно добиться как уменьшения, так и увеличения значений критической температуры, а следовательно, возможна постановка задачи определения оптимальной структуры составного стержня.

Рассматривая кривую, соответствующую, например, значению $k=0,1$ (рис. 2), замечаем, что критическая температура для однородного стержня из алюминия ($\omega=0$) меньше, чем для однородного стального стержня ($\omega=1$). Этот результат легко можно было бы пред-

сказать элементарным сравнением значений коэффициентов температурного расширения алюминия и стали.

Переходя от однородного алюминиевого стержня ($\omega = 0$) к составному стержню со сравнительно небольшой протяженностью стального участка ($\omega \approx 0,2$), из сопоставления значений коэффициентов температурного расширения алюминия и стали следовало бы предсказать увеличение значения критической температуры (за счет введения участка из материала с меньшим значением коэффициента температурного расширения взамен удаленного такого же участка из материала с большим значением коэффициента температурного расширения). Однако для такого составного стержня расчетные значения критической температуры оказываются меньшими, чем для однородного алюминиевого стержня. Неожиданность этого результата характерна для задач термоустойчивости составных стержней и является результатом сильного влияния условий сопряжения участков, изготовленных из материалов, обладающих различными механическими свойствами.

Это явление более наглядно можно обнаружить при переходе от однородного стального стержня ($\omega = 1$) к составному стержню с малой протяженностью участка из алюминия ($\omega \approx 0,9$). Из сопоставления значений коэффициентов температурного расширения следовало бы ожидать уменьшения значения критической температуры при переходе от стального стержня к составному сталь-алюминиевому стержню. Однако на самом деле имеет место непредсказуемое увеличение значения критической температуры. Это увеличение может оказаться весьма существенным (даже многократным) при замене алюминия другим материалом с таким же коэффициентом теплового расширения, но со значительно меньшим модулем упругости (см. кривую, соответствующую значению $k = 0,1$)

Выявленная особенность задачи термоустойчивости составного стержня показывает, что во многих случаях невозможно эвристическое прогнозирование поведения составного стержня, а переход от однородного стержня к составному, путем введения участков небольшой протяженности (но из материала с резко отличающимися упругими свойствами), может обусловить резкое и существенное изменение значения критической температуры.

Институт механики

Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ԴՈՒՐԿԱՐՅԱՆ

Բաղադրյալ ձողի ջերմակայունությունը

Դիտարկվում է ծայրերում հողակապերով ամրացված հավասարաչափ տաքացված բաղադրյալ ձողի կայունությունը: Ստացված է բնութագրիչ հավասարումը և կրիտիկական ջերմաստիճանի արտահայտությունը: Հայտնաբերված է բաղադրյալ ձողի ջերմակայունության առանձնահատկությունը:

Այդ առանձնահատկությունը կայանում է նրանում, որ խիստ տարբերվող առաձգական հատկություններով օժտված փոքր երկարություն ունեցող ձողա-

հատվածի առկայությունը կարող է պայմանավորել կրիտիկական ջերմաստիճանի էական և չկանխագուշակվող փոփոխություններ: Դա երևում է ՅՄ 257 պողպատից և ալյումինի 2024—Т3 համաձուլվածքից պատրաստված բաղադրյալ ձողի համար կառուցված կորերի (նկ. 2) վերլուծությունից (տես $k = 0,602$ տարբերակը): Մասնավորապես, պողպատի և ալյումինի ջերմային ընդարձակման գործակիցների տրժեքների համեմատությունից բխում է, որ համասեռ պողպատե ձողից ($\omega = 1$) փոքր երկարություն ունեցող ալյումինե հատված պարունակող բաղադրյալ ձողին ($\omega = 0,9$) անցումը պետք է պայմանավորի կրիտիկական ջերմաստիճանի նվազում: Սակայն, իրականում տեղի ունի կրիտիկական ջերմաստիճանի չկանխագուշակվող աճ: Այդ աճը կարող է էական (նույնիսկ բազմապատիկ) լինել, եթե ալյումինը փոխարինվի նույն ջերմային ընդարձակման գործակից, բայց զգալիորեն ավելի փոքր առաձգականության մոդուլ ունեցող նյութով (տես $k = 0,1$ արժեքին համապատասխանող կորը):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Б. Е. Гейтвуд, Температурные напряжения, ИЛ, М., 1959. ² А. М. Жуков. Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностроение, № 4, 1959.