ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 3

УДК 517.538.2

МАТЕМАТИКА

Ш. А. Григорян

О замыкании неполных обобщенных систем типа Мюнца—Саса в угловых областях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6/II 1984)

1. В цикле работ М. М. Джрбашяна ([1-5]), посвященных исследованию вопросов полноты и полной внутренней характеристики замыкания различных систем функций, рассмотрена также система

$$\{e^{-\mu_k x} x^{s_k - 1}\}_1^\infty \subset L_2(0, +\infty), \tag{1}$$

где $\{\mu_k\}_1^\infty$—произвольная последовательность комплексных чисел из полуплоскости $\mathrm{Re}z>0$, $s_k \geqslant 1$—кратность появления числа μ_k на отрезке $\{\mu_j\}_1^k$. Им установлено ([1,4]), что для полноты системы (1) в $L_2(0, +\infty)$ необходима и достаточна расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1+|\mu_k|^2)^{-1}\,\mathrm{Re}\mu_k. \tag{2}$$

В специальном случае, когда члены последовательности $\{\mu_k\}_1^\infty$ попарно различны (тогда $s_k=1$, $k\geqslant 1$), этот результат переходит в известную теорему Мюнца—Саса. При условии неполноты (1), т. е. в случае сходимости (2), М. М. Джрбашяном ([1]) дана полная внутренняя характеристика замыкания в метрике $L_2(0, +\infty)$ системы (1).

При наложении дополнительных условий на последовательность $\{\mu_k\}_1^\infty$ в ряде его работ ([1,4,5]) выявлены специфические свойства функций из этого замыкания. Полученные в указанных работах результаты явились существенными обобщениями известных ранее результатов Л. Шварца ([6]) для простой системы $\{e^{-\mu_k x}\}_1^\infty$ ($\mathrm{Im}\mu_k=0$), неполной в $L_2(0, +\infty)$.

2. В данной работе анонсируются результаты о специфических свойствах функций, принадлежащих замыканиям систем вида (1), неполных в определенных пространствах, голоморфных в угловых областях функций. Введем необходимые определения. Пусть $1<\alpha<+\infty$ и $\Delta(\alpha)=\left\{z: |\arg z|<\frac{\pi}{2\alpha},\ 0<|z|<+\infty\right\}$, $\widetilde{\Delta}(\alpha)=\mathbf{C}\setminus\overline{\Delta(\alpha)}$ взаимно-дополнительные угловые области в конечной комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Обозначим через $H_2[\alpha]$ пространство голоморфных в $\Delta(\alpha)$ функций $F(z)$ таких, что

$$\|F\|_{H_2[\alpha]} = \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 dr \right\}^{1/2} < +\infty,$$

а через $H_2[\alpha]$ — пространство голоморфных в $\widetilde{\Delta}(\gamma)$ функций $\Phi(z)$, для которых

$$\|\Phi\|_{H_2[\widetilde{\alpha}]}=\sup_{|\varphi|<\pi-\frac{\pi}{2\alpha}}\left\{\int_0^{+\infty}|\Phi(re^{-i\varphi})|^2dr\right\}^{1/2}<+\infty.$$

Отметим, что намного более общие пространства голоморфных в угловых областях функций впервые введены и исследованы в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна ([7]) (см. также ([8]), гл. VII).

Пусть, далее, $\Lambda=\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, а $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$. Легко проверить, что тогда

$$\{\omega_k(z)\}_1^\infty\equiv\{e^{-\lambda_k z}z^{s_k-1}\}_1^\infty\subset H_2[\gamma],\quad \frac{1}{\gamma}=1-\frac{1}{\alpha}. \tag{3}$$

В работе М. М. Джрбашяна и В. М. Мартиросяна ([9]) установлено, что для полноты (3) в $H_2[\gamma]$ необходима и достаточна расходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^{2\alpha})^{-1}\operatorname{Re}\lambda_k^\alpha. \tag{4}$$

Там же дана полная внутренняя характеристика замыкания системы (3) в метрике $H_2[\gamma]$, в случае сходимости (4). Эти результаты при $\alpha=1$ $(\gamma=+\infty)$ переходят в результаты М. М. Джрбашяна относительно критерия полноты в $L_2(0,+\infty)$ и внутренней характеристики замыкания системы (1) в случае ее неполноты (полагая $H_2[+\infty]\equiv\equiv L_2(0,+\infty)$. Отметим, что сходимость ряда (4) необходима и достаточна для сходимости бесконечного произведения ([10])

$$B_\alpha(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z^\alpha-\lambda_k^\alpha}{z^\alpha+\overline{\lambda}_k^\alpha}\varkappa_k,\qquad \varkappa_k=\frac{|1-\lambda_k^{2\alpha}|}{1-\lambda_k^{2\alpha}},\quad z\in\Delta(\alpha). \tag{5}$$

Если ряд (4) сходится, то (5) определяет голоморфную в $\Delta(\alpha)$ функцию $B_\alpha(z)$.

3. Перейдем к изложению результатов данной работы. Методом биортогонализации М. М. Джрбашяна ([11, 12]) при условии сходимости ряда (4) построена система функций $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty\subset H_2[\widetilde{\gamma}]$, биортогональная с системой (3) в смысле

$$\int_{L_\gamma}\omega_\nu(\zeta)\varphi_k(\zeta)d\zeta=\delta_{k,\nu}=\begin{cases}1, & k=\nu\\ 0, & k\neq\nu\end{cases},$$

где L_γ — общая граница $\Delta(\gamma)$ и $\widetilde{\Delta}(\gamma)=\mathbf{C}\setminus\overline{\Delta(\gamma)}$, с направлением положительного обхода области $\Delta(\gamma)$, а

$$\varphi_k(re^{i\theta})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\theta}\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iry}-1}{iy}\Omega_k^*(e^{i\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}y-\theta\right)}|y|)dy\ (k\geqslant 1),$$

где

$$\Omega_k^*(z)=(-1)^{s_k-1}\frac{B_\alpha(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)^{p_k-s_k-\nu+1}}\ (k\geqslant 1),$$

$$a_\nu(\lambda_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{B_\alpha(z)}\right\}_{z=\lambda_k}\quad(\nu\geqslant 0,\ k\geqslant 1).$$

Итак, построив биортогональную систему, мы показали минимальность системы (3). Теперь для любой функции $f(z)\in H_2[\gamma]$ мы можем образовать формальный ряд

$$f(z)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)e^{-\lambda_k z}z^{s_k-1},\quad c_k(f)=\int\limits_{L_\gamma}f(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau\ (k\geqslant 1).\tag{6}$$

В настоящей статье исследуется сходимость этого ряда в определенном смысле при некоторых дополнительных условиях на последовательность $\Lambda=\{\lambda_k\}_1^\infty$.

А именно, предположим, что последовательность $\Lambda=\{\lambda_k\}_1^\infty$ кроме условия

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^{2\alpha})^{-1}\operatorname{Re}\lambda_k^\alpha<+\infty\tag{7}$$

удовлетворяет также условиям

$$A_\alpha(\Lambda)=\sup_{k\geqslant 1}\{|\arg\lambda_k|\}<\frac{\pi}{2\alpha},\tag{8}$$

$$M_\alpha(\Lambda)=\inf_{k\geqslant 1}\{|\lambda_k|\}>0.\tag{9}$$

Очевидно, что при этих условиях (7) эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^\alpha|^{-1}<+\infty.\tag{10}$$

Будем говорить, что $\{\lambda_k\}_1^\infty\in S_\alpha$, если выполняются условия (7), (8) и (9) одновременно

Из леммы 4.2 работы [5] следует, что если $\{\lambda_k\}_1^\infty\in S_\alpha$, то существует определенная последовательность чисел $0<r_0^\alpha=\frac{1}{2}M_\alpha(\Lambda)<r_1^\alpha<<r_2^\alpha<\ldots<r_n^\alpha<\ldots$, $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n^\alpha=+\infty$ такая, что все точки последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ принадлежат совокупности круговых колец $D_n=\{z: r_n^\alpha<<|z|<r_{n+1}^\alpha\}$, $n\geqslant 0$, и на границах этих колец можно оценить снизу $|B_\alpha(z)|$. Обозначим через g_n множество всех отличных друг от друга точек последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$, лежащих в области D_n, $0\leqslant n<+\infty$, заметив, что $g_n\cap g_m=\varnothing$, $0\leqslant n<m<+\infty$ и каждое g_n—конечное число. Пусть $K_\delta\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\beta\right)=\left\{\zeta:|\arg\zeta|<\frac{\pi}{2\gamma}+\beta,\ \delta<|\zeta|<+\infty\right\}$ —угловой сектор.

Положим $G_n(z;f)=\sum\limits_{(\lambda_k)\subset g_n}c_k(f)e^{-\lambda_k z}z^{s_k-1}$ и наряду с рядом (6) рассмотрим сгруппированный ряд

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}G_n(z;f)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{(\lambda_k)\subset g_n}c_k(f)e^{-\lambda_k z}z^{s_k-1}\right).\tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty\in S_\alpha$. Если функция $f(z)$ принадле-*

жит замыканию в метрике $H_2[\gamma]$ *линейной оболочки системы* (3), *то справедливы следующие утверждения:*

1. *Функция* $f(z)$ *аналитически продолжается в угловую область* $\Delta_\Lambda\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\gamma_\alpha(\Lambda)\right)$, где

$$\Delta_\Lambda\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\gamma_\alpha(\Lambda)\right)=\left\{z:|\arg z|<\frac{\pi}{2\gamma}+\gamma_\alpha(\Lambda),\ 0<|z|<+\infty\right\},\quad \gamma_\alpha(\Lambda)=\frac{\pi}{2\alpha}-A_\alpha(\Lambda).$$

2. *Для любого* $\lambda\geqslant 0$ *и любого углового сектора* $K_\delta\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\beta\right)\subset\Delta_\Lambda\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\gamma_\alpha(\Lambda)\right)$, $\delta>0$, $0<\beta<\gamma_\alpha(\Lambda)$ *существует постоянная* $C=C_\alpha(\delta;\beta)$, *зависящая только от* α, β, δ *и* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ *и такая, что*

$$\left|f(z)-\sum_{m=0}^{n}G_m(z;f)\right|\leqslant C\|f\|_{H_2[\gamma]}\left\{\sum_{m=n+1}^{\infty}e^{-\frac{\varepsilon_0}{2}r_m^\alpha}\right\}e^{-\lambda|z|},$$

$$\varepsilon_0=\frac{1}{8}\delta\sin(\beta-\gamma_\alpha(\Lambda)),\quad z\in K_\delta\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\beta\right),\quad n\geqslant N.$$

Таким образом, отрезки ряда (11) *равномерно аппроксимируют функцию* $f(z)$ *на каждом угловом секторе* $K_\delta\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\beta\right)$ *с касанием порядка* $e^{-\lambda|z|}$ *в бесконечности.*

3. *Во всем угловом секторе* $K_\delta\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\beta\right)$ *справедливы оценки*

$$e^{\lambda(\beta)\operatorname{Re}z}|f(z)|\leqslant e^{\lambda(\beta)\operatorname{Re}z}\sum_{n=0}^{\infty}|G_n(z;f)|\leqslant A|z|^{s(\beta)}\|f\|_{H_2[\gamma]},$$

где $A=A_\alpha(\beta;\delta)$ *зависит только от* α, β, δ *и* $\{\lambda_k\}_1^\infty$, *а*

$$\lambda(\beta)=M_\alpha(\Lambda)\frac{\sin(\gamma_\alpha(\Lambda)-\beta)}{\sin\beta},\quad s(\beta)=\max_{0\leqslant n\leqslant N}\max_{\{\lambda_k\}\subset g_n}(s_k-1)$$

Следствие. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty\in S_\alpha$ и функция $f(z)$ принадлежит замыканию в метрике $H_2[\gamma]$ системы (3). Тогда при любых δ и θ, $\delta>0$, $0<\theta<\frac{\pi}{2\gamma}+\gamma_\alpha(\Lambda)$ будем иметь

$$\left\{\sup_{|\varphi|<\theta}\int_\delta^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^2dr\right\}^{1/2}<B\|f\|_{H_2[\gamma]},$$

где $B=B_\alpha(\delta;\theta)$ зависит только от α, δ, θ и $\{\lambda_k\}_1^\infty$.

Отметим, что в предельном случае, когда $\alpha=1$ ($\gamma=+\infty$), если полагать $H_2[+\infty]=L_2(0,+\infty)$, эта теорема переходит в теорему 4.2 работы [5].

Теперь обозначим через $H_\infty[\gamma]$ класс голоморфных и ограниченных в $\Delta(\gamma)$ функций $f(z)$ и обозначим

$$\|f\|_{H_\infty[\gamma]}=\sup_{z\in\Delta(\gamma)}\{|f(z)|\}.$$

Можно показать, что если $\{\lambda_k\}_1^\infty\in S_\alpha$, то система (3) минимальна в

$H_\alpha[\gamma]$ и с каждой $f(z)\in H_\alpha[\gamma]$ можно ассоциировать ряд вида (6). В этом случае рассмотрим сгруппированный ряд

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{G}_n(z;f)=\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{(\lambda_k+\tau_1)\subset g_n}c_k(f)e^{-\lambda_k z}z^{s_k-1}\Bigg). \qquad (11)$$

Тогда, в обозначениях теоремы 1, имеет место

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty\in S_\alpha$. Если $f(z)$—из замыкания в метрике $H_\alpha[\gamma]$ системы* (3), *то справедливы утверждения:*

1. *Функция $f(z)$ аналитически продолжается в угловую область $\Delta_\Lambda\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\gamma_\alpha(\Lambda)\right)$.*

2. *Для любого $\delta\geqslant0$ и любого углового сектора $K_\delta\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\beta\right)$ существует постоянная $\widetilde{C}=\widetilde{C}_\alpha(\delta,\ \beta,\ \eta)$, зависящая только от α, β, δ, γ и $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и такая, что*

$$\left|f(z)-\sum_{m=0}^{n}\widetilde{G}_m(z;\ f)\right|\leqslant\widetilde{C}\,\|f\|_{H_\alpha[\gamma]}\left\{\sum_{m=n+1}^{\infty}e^{-\frac{\varepsilon_0}{2}r_m^\alpha}\right\}e^{-\lambda|z|},\ z\in K_\delta\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\beta\right),\ n\geqslant N.$$

3. *Во всем угловом секторе $K_\delta\left(\frac{\pi}{2\gamma}+\beta\right)$ справедливы оценки*

$$e^{(\lambda(\delta)-\tau_1)\operatorname{Re}z}|f(z)|\leqslant e^{(\lambda(\delta)-\tau_1)\operatorname{Re}z}\sum_{n=0}^{\infty}|\widetilde{G}_n(z;\ f)|\leqslant\widetilde{A}|z|^{s(\delta)}\|f\|_{H_\alpha[\gamma]},$$

где $\widetilde{A}=\widetilde{A}_\alpha(\delta,\ \beta,\ \tau_1)$ зависит только от α, β, δ, η и $\{\lambda_k\}_1^\infty$.

В заключение приношу глубокую благодарность профессору М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство при выполнении данной работы, а также В. М. Мартиросяну за ценные обсуждения.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ն. Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Անկյունային տիրույթում Մյունց—Սասի տիպի ոչ լրիվ ընդհանրացված համակարգերի փակույթի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է Մյունց—Սասի տիպի ոչ լրիվ ընդհանրացված

$$\{\omega_k(z)\}_1^\infty=\{e^{-\lambda_k z}z^{s_k-1}\}_1^\infty\subset H_2[\gamma]$$

համակարգը, որտեղ $H_2[\gamma]$-ն $\Delta(\gamma)$-ում հոլոմորֆ ֆունկցիաների տարածությունն է, որոնց համար

$$\|f\|_{H_2[\gamma]}=\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2\gamma}}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^2dr\right\}^{1/2}<+\infty$$

ընդ որում $\alpha^{-1}+\gamma^{-1}=1$, $\Lambda=\{\lambda_k\}_1^\infty\subset\Delta(\alpha)$, իսկ s_k-ն λ_k-ի հանդես գալու պատիկությունն է $\{\lambda_j\}_1^k$-ում։

Կառուցվում է $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$ համակարգը, որը բիօրթոգոնալ է $\{\omega_k(z)\}_1^\infty$ համակարգին։

Հետազոտվում է $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(f)\omega_k(z)$, $c_k(f)=\int\limits_{\partial\Delta(\gamma)} f(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau$, $k\geqslant 1$, շարքի զուգամիտությունը, $\{\lambda_k\}_1^\infty$-վրա դրված որոշ պայմանների դեպքում։

Համանման արդյունքներ ստացված են նաև $H_\infty[\gamma]$ տարածության համար. $H_\infty[\gamma]$-ն $\Delta(\gamma)$-ում հոլոմորֆ $f(z)$ ֆունկցիաների դասն է, որոնց համար

$$\|f\|_{H_\infty[\gamma]}=\sup_{z\in\Delta(\gamma)}\{|f(z)|\}<+\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 141, № 3 (1961). [2] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 35, № 2 (1962). [3] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 35, № 3 (1962). [4] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 14, № 6 (1979). [5] *М. М. Джрбашян*, Мат. сб., т. 114 (156), № 1 (1981). [6] *L. Schwartz*, Etude des somms d'exponentelles, 1 ere ed., Paris, Hermann, 1943, 2 eme ed, Strasburg, 1959. [7] *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*, ДАН СССР, т. 120, № 3 (1958); Сиб. мат. журн., т. 1, № 3 (1960). [8] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [9] *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 41, № 4 (1977); ДАН СССР, т. 225, № 5 (1975). [10] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 219, № 6 (1974). [11] *М. М. Джрбашян*, Мат. сб., т. 95 (137) (1974). [12] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 42 (1978).