УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

К. Г. Казарян

Кратная интерполяционная задача в полосе
 и базисность некоторых систем функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/II 1984)

1 (а). Пусть $\{x_k\}_1^\infty$ — последовательность из круга $|z| < 1$ и $s_k \geq 1$ — кратность появления числа x_k на отрезке $\{x_j\}_1^k$ (1,2).

В работе (1) М. М. Джрбашяном была поставлена следующая задача свободной интерполяции с кратными узлами в классах $H_p (0 < p < +\infty)$ Харди—Рисса.

Выявить условия на последовательность $\{x_k\}_1^\infty$ и на пространство последовательностей I , при которых имеет место совпадение

$$\{(f^{(s_k-1)}(x_k))_{k=1}^\infty : f \in H_p\} = I, \quad (1)$$

и построить аппарат для эффективного представления решений интерполяционной задачи

$$f^{(s_k-1)}(x_k) = \gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots); \quad \{\gamma_k\}_1^\infty \in I. \quad (2)$$

В том специальном случае, когда $\{x_k\}_1^\infty$ — суть различные друг от друга точки круга $|z| < 1$, эта задача сводится к интерполяционной задаче с простыми узлами:

$$f(x_k) = \gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2')$$

При рассмотрении этих задач оказалось естественным ограничиться идеальными банаховыми пространствами последовательностей и, в частности, весовыми l_p -пространствами последовательностей.

Критерии существования решения задачи (1)—(2') были установлены в ряде работ (в (2) приведены подробные литературные указания по этому поводу). Отметим, однако, что они существенно опираются на методы теории гильбертовых и банаховых пространств.

(б). В работе (1) был предложен новый, аналитический метод для полного решения сформулированной выше общей интерполяционной задачи (1)—(2) в классе H_2 , метод, позволяющий дать также аналитический аппарат для представления решений этой задачи. Он основан на построении специальных систем аналитических в круге $|z| < 1$ функций, биортогональных на окружности $|z| = 1$.

Применением указанного метода биортогонализации М. М. Джрбашяна было дано полное решение общей интерполяционной задачи (1)—(2) в классах $H_p (0 < p \leq +\infty)$ в круге $|z| < 1$, а также в классах $H_p (1 < p < +\infty)$ в полуплоскости и в угловых областях комплексной плоскости (см. (3-10)).

2 (а). В данной работе анонсируются теоремы, в которых дается решение кратной интерполяционной задачи в классах $H_p(1 < p < +\infty)$ в полосе и устанавливаются критерии минимальности и базисности определенных систем рациональных и экспоненциальных функций. Здесь также существенно используется метод биортогонализации М. М. Джрбашяна.

(б). Пусть $0 < h < +\infty$ и

$$S_h = \{z : |\operatorname{Im} z| < h\}, \quad S_h^* = \{z : |\operatorname{Im} z| > h\},$$

а ∂S_h и ∂S_h^* — соответственно границы этих областей. Обозначим через $H_p[S_h^*]$ класс голоморфных в S_h^* функций $f(z)$ таких, что

$$\|f; S_h^*\|_p = \sup_{|y| > h} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx \right\}^{1/p} < +\infty \quad (1 < p < +\infty).$$

Аналогично определяется класс $H_p[S_h]$.

Рассмотрим системы рациональных функций вида

$$r_k(z) = (s_k - 1)! (z - \lambda_k)^{-s_k} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \{\lambda_k\}_1^\infty \subset S_h.$$

Теорема 1. $\{r_k(z)\}_1^\infty$ минимальна в $H_p[S_h^*]$ тогда и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2h} \operatorname{Im} \lambda_k\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2h} \operatorname{Re} \lambda_k\right)}. \quad (3)$$

В случае минимальности строится биортогональная с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на ∂S_h^* система функций $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty \subset H_q[S_h]$ ($q = p/(p-1)$).

Обозначим через $US(S_h)$ класс тех последовательностей $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset S_h$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\inf_{k \geq 1} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_k}}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{4h} (\lambda_k - \lambda_j)\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{4h} (\lambda_k - \bar{\lambda}_j)\right)} \right| \right\} > 0, \quad \sup_{k \geq 1} \{s_k\} < +\infty.$$

Положим также

$$\lambda_k^{(p)} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2h} \operatorname{Im} \lambda_k\right) \right\}^{s_k - 1/p} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:

1°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$, то система $\{\lambda_k^{(p)} r_k(z)\}_1^\infty$ является базисом пространства $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$, изоморфным стандартному базису пространства l_p , где $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$ — замыкание в метрике $H_p[S_h^*]$ линейной оболочки $\{r_k(z)\}_1^\infty$.

2°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \notin US(S_h)$, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ ни при какой перестановке не является базисом пространства $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$.

Теорема 3. Пусть сходится ряд (3). Тогда:

1°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_n)$, то система $\{(\lambda_k^{(q)})^{-1} \Omega_k(z)\}_1^\infty$ является базисом пространства $\bar{H}_p\{\lambda_k; S_n\}$, изоморфным стандартному базису пространства L_p , где $\bar{H}_p\{\lambda_k; S_n\}$ — замыкание в метрике $H_p[S_n]$ линейной оболочки системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$.

2°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \notin US(S_n)$, то система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ ни при какой перестановке членов не является базисом пространства $\bar{H}_p\{\lambda_k; S_n\}$.

Теорема 4. 1°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_n)$, то справедливы следующие утверждения:

а) справедливы равенства

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty; f(z) \in H_p[S_n]\} = \{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty; f(z) \in \bar{H}_p\{\lambda_k; S_n\}\} = L_p\{\lambda_k^{(q)}\},$$

где $L_p\{\lambda_k^{(q)}\}$ множество последовательностей $\{\gamma_k\}_1^\infty$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^p (\lambda_k^{(q)})^p < +\infty;$$

б) если $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty \in L_p\{\lambda_k^{(q)}\}$, то ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \Omega_k(z)$$

сходится в метрике $H_p[S_n]$ и определяет функцию $f(z) \in \bar{H}_p\{\lambda_k; S_n\}$, которая удовлетворяет следующим интерполяционным данным

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \gamma_k \quad (k=1, 2, \dots); \quad (4)$$

в) функция из класса $\bar{H}_p\{\lambda_k; S_n\}$, удовлетворяющая интерполяционным данным (4), единственна.

2°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \notin US(S_n)$, то пространство

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty; f \in H_p[S_n]\} \quad (5)$$

не совпадает ни с каким идеальным пространством последовательностей.

3. В работах М. М. Джрбашяна (^{11,12}), посвященных систематическому изложению и исследованию вопросов представления и замкнутости ряда важных систем аналитических функций, введена также одна система функций и установлены важные связи этой системы с полиномами Поллачека. Отметим только, что линейные комбинации одной из рассмотренных им систем совпадают с линейными комбинациями функций системы $\{e^{-i\lambda_k t^{s_k-1}}\}_1^\infty$. С учетом этого обстоятельства теорему 5 работы (¹²) можно сформулировать и таким образом:

Для полноты системы $\{e^{-i\lambda_k t^{s_k-1}}\}_1^\infty$ в пространстве L_2 с весом $e^{-2h|t|}$ на оси $(-\infty, +\infty)$ (или коротко $L_2(e^{-2h|t|} dt)$) необходима и достаточна расходимость ряда (3).

Отметим, что когда члены последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ попарно различны (тогда $s_k=1, k \geq 1$), эта теорема переходит в теорему Н. Винера и Р. Пэли (¹³).

Теорема 5. Для минимальности системы $\{e^{-i\lambda_k t^{s_k-1}}\}_1^\infty$ необходима и достаточна сходимость ряда (3).

Теорема 6. Справедливы следующие утверждения:

1°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_n)$, то система $\{\lambda_k^{(2)} e^{-i\lambda_k t^{s_k-1}}\}_1^\infty$ является

базисом пространства $L_2\{e^{-2h|t|}dt; \lambda_k\}$, изоморфным стандартному базису пространства l_2 , где $L_2\{e^{-2h|t|}dt; \lambda_k\}$ — замыкание в метрике $L_2(e^{-2h|t|}dt)$ линейной оболочки системы $\{e^{-\lambda_k|t|}t^{s_k-1}\}_1^\infty$.

2°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$, то система $\{e^{-\lambda_k|t|}t^{s_k-1}\}_1^\infty$ ни при какой перестановке членов не является базисом пространства $L_2\{e^{-2h|t|}dt; \lambda_k\}$.

Отметим, что в случае, когда все члены последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ попарно различны (т. е. $s_k=1, k \geq 1$), критерий базисности системы $\{e^{-\lambda_k|t|}\}_1^\infty$ был установлен в работе (14).

Автор приносит благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство при выполнении данной работы.

Ереванский государственный университет

Կ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Շեքտում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդիրը և որոշ ֆունկցիաների սիստեմների բազիսությունը

Ներկա աշխատանքում բերված է շեքտում $H_p(1 < p < +\infty)$ դասում պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների սիստեմի մինիմալության հայտանիշը: Այդ սիստեմի մինիմալության դեպքում U, U . Ջրբաշյանի բիօրթոգոնալիզացիայի մեթոդով կառուցվում է բիօրթոգոնալ սիստեմը և բերվում է համապատասխան մետրիկաներում ֆունկցիաների այդ սիստեմների բազիսության հայտանիշեր: Տրված է շեքտում $H_p(1 < p < +\infty)$ դասերում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի էֆեկտիվ լուծումը:

Ի վերջո, բերվում է որոշ էքսպոնենցիալ ֆունկցիաների սիստեմների մինիմալության և բազիսության հայտանիշեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 141, № 3 (1961). ² М. М. Джрбашян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, № 5 (1974). ³ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 234, № 3 (1977); Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 43, № 6 (1973). ⁴ Г. М. Айрапетян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 10, № 2 (1975). ⁵ Ф. А. Шамоян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 11, № 2 (1976). ⁶ В. М. Мартиросян, ДАН АрмССР, т. 63, № 5 (1976). ⁷ А. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 234, № 6 (1977). ⁸ Г. М. Айрапетян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 12, № 4 (1977). ⁹ В. М. Мартиросян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 13, № 5—6 (1978); ДАН СССР, т. 245, № 1 (1979). ¹⁰ В. М. Мартиросян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 16, № 5 (1981); ДАН СССР, т. 263, № 4 (1982). ¹¹ М. М. Джрбашян, ДАН АрмССР, т. 35, № 1 (1962). ¹² М. М. Джрбашян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 14, № 6 (1979). ¹³ Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, Наука, М., 1964. ¹⁴ А. М. Седлецкий, Мат. сб., 96(138), № 1 (1975).