УДК 517.948 : 513.8+519.4

В. А. Хацкевич

О характеристических спектральных свойствах
 фокусирующих операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 19/V 1983)

Пусть комплексное банахово пространство B есть прямая сумма банаховых пространств B_i , $i=1, 2$: $B=B_1+B_2$; E_i —отвечающие этой сумме проекторы ($E_i B=B_i$, $E_1+E_2=I$). Для $x \in B$ положим $E_i x=x_i$ и пусть $Z=\{x \in B : \|x_1\| \geq \|x_2\|\}$. Линейный оператор A в B назовем фокусирующим (ср. (1)), если для всех $x \in Z$ выполнено неравенство

$$\|E_2 Ax\| \leq q \|E_1 Ax\|, \quad q=q(A) < 1. \quad (1)$$

Инвариантные подпространства фокусирующих операторов в случае гильбертова пространства $B=H$ изучались в (2-4) (см. также (5), где детально исследован частный случай фокусирующих операторов—равномерно J -растягивающие операторы), а в общем случае банахова пространства—в (1-6). Некоторые спектральные свойства таких операторов рассмотрены в (1-3, 5). При этом в работе (1) интересующие нас результаты получены, с одной стороны, при более общем, нежели у нас, определении фокусирующего оператора, а с другой—для случая вещественного пространства B и при условии $\dim B_1 = n < \infty$.

В настоящей статье, развивая методы работ (1-3) и используя результаты из (7), мы изучаем характеристические спектральные свойства оператора с фокусирующей степенью. При этом удастся усилить некоторые предложения работ (3-6) об инвариантных подпространствах фокусирующего оператора.

Положим $N=\{x \in B : \|x_1\| \leq \|x_2\|\}$. Через $M_1(M_2)$ обозначим класс всех подпространств $L_1(L_2)$ из B таких, что $L_1 \subset Z$ ($L_2 \subset N$) и $E_1 L_1 = B_1$ ($E_2 L_2 = B_2$). Как известно (см., например, (8)), всякому $L_1 \in M_1$ ($L_2 \in M_2$) биоднозначно отвечает оператор $Q_1 \in K_1$ ($Q_2 \in K_2$); $Q_1 : B_1 \rightarrow B_2$, $\|Q_1\| \leq 1$ ($Q_2 : B_2 \rightarrow B_1$, $\|Q_2\| \leq 1$). Положим $K_i^0 = \{Q_i \in K_i : \|Q_i\| < 1\}$; $M_i^0 = \{(E_i + Q_i)B_i : Q_i \in K_i^0\}$, $i=1, 2$. Через A_{ij} обозначим блоки $E_i A E_j$ оператора A , $i, j=1, 2$. Через $\sigma(A/L)$ обозначим спектр сужения оператора A на его инвариантное подпространство L . Положим $\sigma(A/B) = \sigma(A)$. Всюду ниже оператор A предполагается ограниченным.

Теорема 1. Пусть фокусирующий оператор A удовлетворяет условию (а) A_{11} —гомеоморфизм B_1 на B_1 и $\|A_{11}^{-1} A_{12}\| < 1$.

Тогда A обладает единственным в M_1 инвариантным подпространством $L_0 \in M_1^0$ таким, что

$$|\lambda| \leq q |\mu|, \quad \text{где } \mu \in \sigma(A/L_0), \quad \lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma(A/L_0). \quad (2)$$

Доказательство. Положим $K_1^q = \{Q_1 \in K_1 : \|Q_1\| \leq q, 0 \leq q \leq 1\}$. Согласно условию (а) оператор A порождает (°) дробно-линейное преобразование $F_A : K_1 \rightarrow K_1^q$ по формуле

$$F_A(Q_1) = (A_{21} + A_{22}Q_1)(A_{11} + A_{12}Q_1)^{-1}.$$

В силу $q < 1$ и аналитичности F_A из (°) следует, что преобразование F_A имеет единственную в K_1 неподвижную точку $Q_0 \in K_1^0$. Отвечающее оператору Q_0 подпространство $L_0 = (E_1 + Q_0)B_1$ — единственное в M_1 инвариантное подпространство оператора A .

Как и в (1), определим функцию $\Phi(u, z)$ ($u, z \in B$), положив $\Phi(u, z) = 0$, если $tz - u \in Z$ при всех $t \in R$; положив $\Phi(u, z) = \beta - \alpha$, где $\beta = \inf\{t : sz - u \in Z \text{ при } s \geq t\}$, $\alpha = \sup\{t : sz - u \in Z \text{ при } s \leq t\}$, если α и β конечны; положив $\Phi(u, z) = \infty$ в остальных случаях. Пусть $D = B/L_0$; положим $\Psi([u], z) = \sup\{\varphi : \varphi = \Phi(v, \alpha z) \text{ } v \in [u], [u] \in D, z \in B, |\alpha| = 1\}$. Функция $\Psi([u], z)$ определена на произведении $D \times (L_0 \setminus \{0\})$ и удовлетворяет следующим условиям: $\Psi([u], z) \geq 0$, $\Psi([u], z) = 0$ тогда и только тогда, когда $[u] = [0] = L_0$; $\Psi(\mu[u], \nu z) = \frac{|\mu|}{|\nu|} \Psi([u], z)$ при лю-

бом вещественном μ и любом комплексном $\nu \neq 0$; $\Psi(\bar{A}[u], Az) \leq q \Psi([u], z)$, где $\bar{A} : D \rightarrow D$ — отображение, задаваемое формулой: $\bar{A}[u] = \{Av : v \in [u]\}$. Из последнего неравенства и легко проверяемого соотношения $\|z\| \Psi(\bar{A}[u], z) \leq M \| [u] \|_D$, где $[u] \in D, 0 \neq z \in L_0, 0 \leq M < \infty$, следует условие (2) (ср. (1)). Теорема доказана.

В случае рефлексивного B теорема 1 допускает значительное усиление.

Положим $Z^* = \{x^* : x^* \in B^*, \|E_1 x^*\| \geq \|E_2 x^*\|\}$, $M_1^* = \{L^* : L^* \subset Z^*, E_1^* L^* = B_1^*\}$, пусть M_1^{*0} — аналог класса M_1^0 .

Назовем дуальной парой (д. п.) пару подпространств (L_1, L_2) такую, что $L_i \in M_1, i = 1, 2$.

Теорема 2 (ср. (3)). Пусть в рефлексивном пространстве B фокусирующий оператор A удовлетворяет условию (а). Тогда существует единственная д. п. $(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ со свойствами: $\tilde{L}_i \in M_1^0, i = 1, 2$;

$$A\tilde{L}_1 = \tilde{L}_1, A\tilde{L}_2 \subset \tilde{L}_2; \tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 = B$$

$$\text{и } |\lambda| \leq q|\mu|, \lambda \in \sigma(A/\tilde{L}_2), \mu \in \sigma(A/\tilde{L}_1), q = q(A). \quad (3)$$

Доказательство. Из (а) следует, что $AL_1 \in M_1$ для всех $L_1 \in M_1$. Отсюда получаем: $A^*Z^* \subset Z^*$. Из первой части условия (а) и фокусируемости A следует: A_{11}^* — гомеоморфизм B_1^* на B_1^* и $\|(A_{11}^*)^{-1} A_{21}^*\| \leq q < 1$.

Покажем, что A^* — фокусирующий оператор; в силу рефлексивности B это эквивалентно следующему соотношению:

$$\|F_{A^*}(Q_2^*)\| (= \|(A_{12}^* + A_{22}^*Q_2^*)(A_{11}^* + A_{21}^*Q_2^*)\|) \leq q^*, \quad (4)$$

где $Q_2^* \in K_2, q^* = q^*(A^*) : 0 \leq q^* < 1$.

Вопреки (4) предположим существование последовательности $\{Q_2^n\}_{n=1}^\infty$ такой, что $Q_2^n \in K_2, \|F_{A^*}(Q_2^n)\| \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$. Тогда для $\hat{Q}_2^{n*} = F_{A^*}(Q_2^n)$

найдем $y^n \in B_2 : \|y^n\| = 1, (\delta_n =) \|\hat{Q}_2^n y^n\| \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$. Положив $x^n = \hat{Q}_2^n y^n - \delta_n y^n$, получим, что $\|x^n\| = \|y^n\|$. Отсюда из условия фокусируемости A и (а) следует, что $\|E_2 A x^n\| \leq q(A) \|E_1 A x^n\|; \|E_1 A x^n\| \geq \varepsilon > 0$ при $n \geq n_0$. Положив $y^n = \hat{Q}_2^n y^n - y^n$, получаем $x^n - y^n \rightarrow 0$, откуда

$$\|E_2 A y^n\| < \|E_1 A y^n\| \quad (n \geq m). \quad (5)$$

Пусть $L_n^* = (E_1^* + \hat{Q}_2^{n*}) B_1^*$, тогда $A^* L_n^* = (E_1^* + \hat{Q}_2^{n*}) B_1^*$. Полагая $X^*(Y) = \{x^*(y) : x^* \in X^*, x \in Y\}$, имеем $L_n^*(A y^n) = A^* L_n^*(y^n) = (E_1^* + \hat{Q}_2^{n*}) B_1^* (\hat{Q}_2^n - E_2) y^n = \{0\}$, что в силу (5) противоречит условию $L_n^* \in M_1^*$. Фокусируемость A^* доказана.

Таким образом, как A , так и A^* удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Поэтому существуют подпространства $\tilde{L}_1 \in M_1^0, L_1^* \in M_1^{*0}$ такие, что $A \tilde{L}_1 = \tilde{L}_1, A^* L_1^* = L_1^*$. Положив $\tilde{L}_2 = (L_1^*)^\perp (= \{y \in B : L_1^*(y) = \{0\}\})$, получаем $\tilde{L}_2 \in M_2^0, A \tilde{L}_2 \subset \tilde{L}_2$, а также (6) $\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 = B$. Поэтому $\sigma(A) = \sigma(A/\tilde{L}_1) \cup \sigma(A/\tilde{L}_2)$, и условие (3) следует из (2). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Для любого натурального числа p можно привести пример такого оператора A , что A^r фокусирует начиная с $r = p$ и не фокусирует при $0 \leq r < p$. Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, если в них условие фокусируемости A заменить более общим условием фокусируемости некоторой степени $A^p, p \geq 1$. Обратное, если

$$AZ \subset Z, \quad (6)$$

существует такая д. п. (L_1, L_2) , что $L_i \in M_i^p, i = 1, 2; A L_i \subset L_i$ и выполнено (3) при $0 \leq q < 1$, то для некоторого натурального p оператор A^p фокусирует. Поэтому справедлива

Т е о р е м а 3. Пусть в рефлексивном пространстве B оператор A удовлетворяет условиям (а) и (6). Тогда фокусируемость некоторой натуральной степени A^p эквивалентна наличию д. п. $(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ такой же, как и в теореме 2.

Воронежский государственный университет

Վ. Ա. ԽԱՅԿԵՎԻՉ

Ֆոկուսացնող օպերատորների բնութագրիչ սպեկտրալ հատկությունների մասին

Հողվածում ուսումնասիրվում է Բանախի տարածության մեջ ֆոկուսացնող օպերատորի դուալ ինվարիանտ ենթատարածությունները և այդ ենթատարածությունների վրա նեղացված օպերատորների սպեկտրալ հատկությունները:

Ստացված է հայտանիշ՝ օպերատորի որևէ աստիճանը ֆոկուսացնող օպերատոր լինելու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИЦЦУЛЬНІСТЬ

- ¹ М. А. Краскосельский, А. В. Соболев, АН СССР, т. 225, № 6 (1975). ² Т. Я. Азизов, С. А. Хорошавин, Функц. анализ и его прилож., т. 14, вып. 4 (1980). ³ А. В. Соболев, В. А. Хацкевич, Функц. анализ и его прилож., т. 15, вып. 1 (1981). ⁴ В. А. Хацкевич, Мат. заметки, т. 30, вып. 5 (1981). ⁵ Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Наука, М., 1970. ⁶ В. А. Хацкевич, Укр. мат. журн., т. 33, № 5 (1981). ⁷ L. Harris, Schwartz-pick systems of pseudometrics for domain in normed linear spaces, p. 345–406, in Advanced in holomorphy, North-Holland, 1979.