

УДК 512.831

МАТЕМАТИКА

А. М. Мовсисян

Сверточные тождества на нильпотентной подалгебре алгебры матриц второго порядка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 15/IV 1983)

Для смешанного тензора T над полем k через $S_b^a T$ будем обозначать свертку T по a -му верхнему и b -му нижнему индексам. Сверточной формой степени n называем выражение вида

$$G = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \xi_{i_1, i_2, \dots, i_n} S_{i_1}^1 S_{i_2}^2 \dots S_{i_n}^n, \quad (1)$$

где $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in k$, а сумма распространена на все перестановки $i_1, i_2, \dots, i_n$ множества $1, 2, \dots, n$. Значением формы (1) на (n, n) -тензоре T называется элемент

$$G(T) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \xi_{i_1, i_2, \dots, i_n} S_{i_1}^1 S_{i_2}^2 \dots S_{i_n}^n T \in k.$$

Матрицу A из алгебры k_m будем рассматривать как $(1, 1)$ -тензор. Сверточную форму G называем тождеством на k_m , если

$$G(A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n) = 0$$

для любых матриц $A_1, A_2, \dots, A_n \in k_m$. Такие тождества изучались в ⁽¹⁾ (тот факт, что там были произвольные (n, n) -тензоры, а не только разложимые тензоры вида $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$, не меняет дела, так как разложимые тензоры порождают все пространство (n, n) -тензоров). Там же было показано, что все они — следствия тождества, эквивалентного теореме Кэли—Гамильтона.

Здесь мы занимаемся более общей задачей. Пусть U — подалгебра k_m . Форму G будем называть (s, n) -тождеством на U , если

$$G(A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_s \otimes B_{s+1} \otimes \dots \otimes B_n) = 0$$

для любых матриц $A_1, \dots, A_s \in k_m, B_{s+1}, \dots, B_n \in U$.

Пусть $T_1 = D_1 \otimes D_2 \otimes \dots \otimes D_f \otimes F_{f+1} \otimes \dots \otimes F_f, f \geq n, D_i \in k_m, F_j \in U$, и пусть $j_1, j_2, \dots, j_{f-n}$ — различные целые между 1 и $f, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{f-n} \leq f$. Тогда свертка

$$T_2 = S_{j_1}^{i_1} S_{j_2}^{i_2} \dots S_{j_{f-n}}^{i_{f-n}} T_1$$

имеет вид

$$T_2 = \alpha C_1 \otimes C_2 \otimes \dots \otimes C_n,$$

где каждая из матриц C_i — произведение нескольких из матриц $D_1, \dots, D_f, F_{f+1}, \dots, F_f$, а $\alpha \in k$ — элемент, равный произведению следов от произведений каких-то из матриц $D_1, \dots, D_f, F_{f+1}, \dots, F_f$.

Предположим, что свертка такова, что $C_{s+1} \otimes C_{s+2} \otimes \dots \otimes C_n$ с точностью до скалярного множителя получается сверткой из $F_{t+1} \otimes \dots \otimes F_f$, так что $C_{s+1}, \dots, C_n \in U$ (отметим, что и некоторые из матриц $C_1, \dots, C_s$ тоже могут принадлежать U). Тогда, подставляя в тождество (2), получим (t, f) тождество на U , которое будем называть непосредственным формальным (t, f) -следствием (2).

Если у нас теперь имеется некоторая система тождеств на U , то (t, f) -тождество на U будет называться формальным следствием этой системы, если оно является линейной комбинацией непосредственных формальных (t, f) -следствий тождеств этой системы.

Теперь мы можем сформулировать интересующую нас проблему. Пусть U — подалгебра алгебры k_m ; требуется найти систему сверточных тождеств на U такую, что всякое сверточное тождество на U — формальное следствие тождеств этой системы. В настоящей работе указанная проблема решается для подалгебры N алгебры k_2 , состоящей из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in k.$$

Теорема. *Всякое сверточное тождество на N следует из тождеств:*

$$1) S_1 B = 0,$$

$$2) S_1^2 S_3^2 S_1^3 (A_1 \otimes B_2 \otimes B_3) = 0,$$

$$3) \sum_{i_1, i_2, i_3} (-1)^{j(i_1, i_2, i_3)} S_{i_1}^1 S_{i_2}^2 S_{i_3}^3 (A_1 \otimes A_2 \otimes A_3) = 0.$$

Замечание. Тождество 3) эквивалентно теореме Кэли — Гамильтона для матриц второго порядка (см. (1)). Тождества 1), 2) равносильны соотношениям:

$$S_p B = 0, \quad B_1 B_2 = 0.$$

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i_1, \dots, i_f} \xi_{i_1, i_2, \dots, i_f} S_{i_1}^1 S_{i_2}^2 \dots S_{i_f}^f (A_1 \otimes \dots \otimes A_t \otimes B_{t+1} \otimes \dots \otimes B_f) = 0 \quad (2)$$

— (s, f) -тождество на N . Как и в (1), типом этого тождества назовем наибольшую (в смысле лексикографического упорядочения) перестановку $i_1, i_2, \dots, i_f$ такую, что $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_f} \neq 0$, типом нулевого тождества считаем ∞ . Если в последовательности $i_1, i_2, \dots, i_f$ есть убывающая подпоследовательность длины 3, то вычитая из (2) соответствующее формальное следствие тождества 3), мы сможем уменьшить тип тождества (2) (подробнее эта процедура описана в (1)). Точно так же можно уменьшить тип тождества, если для некоторого $j > t$ $i_j = j$ (за счет формального следствия тождества 1), или если при $j > f$ также и $i_j > f$ (вычитая соответствующее формальное следствие 1 или тождества 2).

Остается, таким образом, показать, что если в (2) коэффициенты $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_f}$ равны 0 при $(j_1, j_2, \dots, j_f) > (i_1, i_2, \dots, i_f)$ и в последовательности $i_1, i_2, \dots, i_f$ нет убывающих подпоследовательностей

длины 3, причем $i_s \leq t$ при $s > t$, то $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_f} = 0$. Для доказательства же этого утверждения сделаем в (2) подстановку

$$A_r, B_r \rightarrow e_{\alpha_r \beta_r},$$

где

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\beta_r = 1$, если числу i_r в последовательности $i_1, i_2, \dots, i_f$ не предшествует большее число, $\beta_r = 2$ в противном случае, $\alpha_r = \beta_q$ для такого q , что $i_q = r$. Если $r > t$, то $\beta_r = 2$, так как по условию тогда $i_r \leq t$ и среди чисел $i_1, i_2, \dots, i_f$ хотя бы одно больше i_r . Далее, при $r > t$ пусть $i_q = r$, тогда $q \leq t$, $i_q = r > t \geq i_f$, и поэтому $i_q > i_p$ для $p < q$ (в противном случае была бы убывающая тройка $i_p > i_q > i_f$), а это означает, что $\alpha_r = \beta_q = 1$. Таким образом, вместо матрицы B_r ($r > t$) всегда подставляется матрица $e_{12} \in N$, т. е. наша подстановка корректна.

Но эта подстановка в точности та же самая, которая фигурировала в лемме работы ⁽¹⁾, поэтому

$$S_{j_1}^1 S_{j_2}^2 \dots S_{j_f}^{j_f} (e_{\alpha_1 \beta_1} \otimes e_{\alpha_2 \beta_2} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_f \beta_f}) = 0$$

при $(j_1, j_2, \dots, j_f) < (i_1, i_2, \dots, i_f)$,

$$S_{i_1}^1 S_{i_2}^2 \dots S_{i_f}^{i_f} (e_{\alpha_1 \beta_1} \otimes e_{\alpha_2 \beta_2} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_f \beta_f}) = 1.$$

Подставляя эти тождества в (2) и помня, что $\xi_{j_1, j_2, \dots, j_f} = 0$ при $(j_1, j_2, \dots, j_f) > (i_1, i_2, \dots, i_f)$, получаем требуемое равенство

$$\xi_{i_1, i_2, \dots, i_f} = 0.$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. В. Яковлеву, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный
университет

Ա. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Երկրորդ կարգի մատրիցաների հանրահաշիվների նիլպոտենտ
ենթահանրահաշիվների փաթաթման նույնությունները

Աշխատանքում դիտարկվում է մատրիցաների հանրահաշիվների նիլպոտենտ ենթահանրահաշիվների հետքով նույնությունների փաթաթման տարրերակր: Տրվում է փաթաթման նույնությունների գաղափարը մատրիցաների հանրահաշիվների ցանկացած ենթահանրահաշիվների վրա: Երկրորդ կարգի մատրիցաների որոշ ենթահանրահաշիվի համար նկարագրվում են փաթաթման նույնությունները:

ЛИТЕРАТУРА — ЧԻՏՈՒՄՆԵՐԸ

¹ А. В. Яковлев, А. М. Мовсисян. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та АН СССР, т. 114 (1982).