ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIX 1984 2

УДК 51.01 : 517

МАТЕМАТИКА

С. Н. Манукян

Задача Дирихле в конструктивном анализе

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 27/V 1983)

В этой заметке рассматривается вопрос о разрешимости задачи Дирихле в конструктивном анализе для достаточно широкого класса областей и граничных условий. Основные понятия конструктивного анализа и теории конструктивных кривых определяются так же, как в ([1,2]).

Теорема. *Пусть K—конструктивная равномерно-непрерывная замкнутая континентная кривая, заданная на $a\Delta b$, пусть f—равномерно-непрерывная функция, заданная на K. Пусть, далее, существуют алгорифмы A, B такие, что:*

1) алгорифм A перерабатывает каждое натуральное число в FR-число, принадлежащее $a\Delta b$; 2) алгорифм B перерабатывает каждое натуральное число n в отрезок, начальная точка которого равна $K(A(n))$ и всякая точка которого, отличная от начальной точки $K(A(n))$, является внешней относительно кривой K; 3) для всякого FR-числа $t\in a\Delta b$ существует отрезок вида $K(t)\Delta x\circ y$ (где $x\circ y$—некоторая точка плоскости) такой, что всякая его точка, отличная от $K(t)$, является внешней относительно кривой K и $K(t)\Delta x\circ y$ является пределом некоторой конструктивной подпоследовательности последовательности B. Тогда существует конструктивная двухместная функция g, заданная и равномерно-непрерывная в замкнутой области, ограниченной кривой K, совпадающая с f на кривой K и гармоническая во всякой точке, внутренней относительно K.*

Метод доказательства. Введем некоторые вспомогательные определения.

Понятия супергармонической функции, а также понятия верхней и нижней функции относительно заданной кривой K и граничного условия f определяются в точной аналогии с классическими понятиями ([3]).

Обозначим через L конструктивную двухместную функцию, заданную во всех точках $x\circ y$ таких, что $\neg(y=0\,\&\,x\leqslant 0)$, и определяемую следующим равенством:

$$L(x,\ y)=\frac{-\ln\sqrt{x^2+y^2}}{(\ln\sqrt{x^2+y^2})^2+\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}.$$

* Т. е. на конструктивном множестве точек, не являющихся внешними относительно K.

Легко видеть, что функция L при соответствующем выборе ветви комплексного логарифма удовлетворяет соотношению

$$L(x, y) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{\ln(x+iy)}\right);$$

отсюда следует, что L гармонична всюду в области задания. Через L_ε^*, где ε—рациональное число, не превосходящее $\frac{1}{25}$, будем обозначать функцию такую, что при любых x и y, удовлетворяющих условию $\neg(y=0\&x\leqslant 0)$, имеет место равенство

$$L_\varepsilon^*(x, y) = \begin{cases} \min(w, L(x, y)) & \text{при } x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2; \\ w & \text{при } x^2+y^2>\varepsilon^2, \end{cases}$$

где w есть точная нижняя грань функции L при $\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2\right)\&$ $\neg(y=0\&x\leqslant 0)$ (отметим, что функция L равномерно-непрерывна при $\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2\right)\&(y\geqslant 0)\&\neg(y=0\&x\leqslant 0)$ и при $\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2\right)\&(y\leqslant\leqslant 0)\&\neg(y=0\&x\leqslant 0)$, а потому FR-число w можно построить).

Пусть $K(t)\Delta u\partial v$—отрезок, не имеющий с кривой K других общих точек кроме $K(t)$ и такой, что всякая принадлежащая ему точка, отличная от $K(t)$, является внешней относительно K. Тогда барьерной функцией, порожденной отрезком $K(t)\Delta u\partial v$, будем называть любую двухместную функцию ψ_ε при $0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{25}$ такую, что для всякой точки $x\partial y$, не являющейся внешней относительно K и отличной от $K(t)$, имеет место равенство

$$\psi_\varepsilon(x, y) = L_\varepsilon^*\left(-\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{\beta\xi-\alpha\eta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right),$$

где

$$\alpha = u - Э_л(K(t)); \quad \xi = x - Э_л(K(t));$$

$$\beta = v - Э_п(K(t)); \quad \eta = y - Э_п(K(t)).$$

Легко показать, что $\psi_\varepsilon(x, y)>0$ для всякой точки $x\partial y$, не являющейся внешней относительно K и отличной от $K(t)$, и

$$\lim_{x\partial y\to K(t)} \psi_\varepsilon(x, y) = 0.$$

Введем теперь понятия опорной нижней и опорной верхней функций, играющие основную роль в дальнейших рассмотрениях.

Опорной нижней (соответственно, верхней) функцией будем называть всякую двухместную функцию, определенную во всякой точке $x\partial y$, не являющейся внешней для кривой K, и задаваемую посредством слова, включающего в себя информацию о следующих объектах, удовлетворяющих указанным ниже условиям а), б), в):

1) система не касающихся друг друга кругов $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_s$ с рациональными радиусами и с центрами, расположенными либо в рациональных точках плоскости, либо в точках вида $K(A(n))$ (при этом

для центра каждого из кругов Ω_i указывается, который из двух указанных случаев имеет место, и во втором случае задается натуральное число n такое, что $K(A(n))$ есть центр круга Ω_i);

2) система $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)$ объектов, количество которых равно количеству ограниченных элементарных областей $(T_1, T_2, \ldots, T_k)$, выделяемых на плоскости кругами $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_s$ и пересекающихся лишь своими границами (напомним, что круги $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_s$ не касаются друг друга); при этом зафиксировано соответствие между объектами ψ_i и указанными областями T_i, и каждый из объектов ψ_i является системой функций $(\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, \ldots, \varphi_{j_{q_i}})$, где каждая из функций является либо гармоническим на всей плоскости полиномом от двух переменных с рациональными коэффициентами, либо имеет вид $u+v \cdot \psi_s$, где u и $v<0$—какие-либо рациональные числа (в случае определения опорной верхней функции неравенство $v<0$ заменяется на $v>0$), и ψ_s—барьерная функция, порожденная некоторым отрезком $B(n)$, начальная точка которого $K(A(n))$ является центром одного из кругов Ω_l, содержащего область, соответствующую системе ψ_i.

Условия а), б), в), которым должны удовлетворять перечисленные объекты, формулируются следующим образом: а) всякая точка, не являющаяся внешней относительно кривой K, принадлежит внутренности одного из кругов Ω_i; б) если T_j и T_n—области, являющиеся соседними друг с другом, ψ_j и ψ_n—две соответствующие им функции, E—граница между T_j и T_n, то тогда в каждой из систем ψ_j и ψ_n максимум всех функций, входящих в одну из этих систем и не входящих в другую, оказывается на границе E строго меньше максимума функций, входящих одновременно в обе системы (в случае определения опорной верхней функции минимум всех функций, входящих в одну из этих систем и не входящих в другую, оказывается на границе E строго больше минимума функций, входящих одновременно в обе системы); в) во всякой точке, лежащей на кривой K и принадлежащей одной из областей T_i или ее границе, значение функции f строго больше максимума значений всех функций, входящих в систему ψ_i (в случае определения опорной верхней функции значение функции f строго меньше минимума значений всех функций, входящих в систему ψ_i).

Если задано слово, удовлетворяющее перечисленным условиям, то тогда функция φ, задаваемая этим словом, в каждой точке x, y, принадлежащей одной из областей T_i или ее границе, определяется как максимум значений всех функций, входящих в систему ψ_i (в случае определения опорной верхней функции — как минимум значений всех функций, входящих в систему ψ_i).

Нетрудно показать, что множество всех слов, кодирующих нижние опорные функции, а также множество всех слов, кодирующих верхние опорные функции, рекурсивно перечислимо. Но тогда мы можем построить точную верхнюю границу множества всех опорных нижних функций φ^- (соответственно точную нижнюю границу φ^+ множества всех опорных верхних функций) в виде алгорифма, перерабатывающего всякую точку $x \circ y$, где x и y—FR-числа, в некоторое шпекерово число (соответственно, в число, противоположное шпекерову).

Используя методы, аналогичные классическим рассмотрениям (см., например, ([3]), с. 183—201), и применяя метод заполнений ([4]), можно показать, что φ^+ и φ^- равны и гармоничны на конструктивном множестве точек, не являющихся внешними относительно кривой K. Но тогда значения функции φ, совпадающей с φ^+ и φ^-, являются одновременно шпекеровыми числами и, кроме того, числами, противоположными шпекеровым; следовательно, могут быть построены FR-числа, эквивалентные этим значениям. Таким образом, φ эквивалентна некоторой конструктивной функции, гармонической на множестве точек, не являющихся внешними относительно K. Используя основные свойства барьерных функций, аналогичные свойствам, рассматриваемым в классической теории (см., например, ([3]), с. 201, 202), нетрудно показать, что функция φ равномерно непрерывна на указанном выше множестве точек и значения ее на кривой K совпадают с соответствующими значениями функции f. Тем самым построенная функция φ удовлетворяет всем условиям теоремы, что и завершает доказательство.

Среди утверждений, аналогичных классическим и получаемых методом заполнений, отметим принцип максимума: пусть K—замкнутая равномерно-непрерывная самонепересекающаяся кривая, и пусть двухместная функция f задана во всякой точке, не являющейся внешней относительно K, равномерно-непрерывна на конструктивном множестве всех таких точек, удовлетворяет неравенству $f(x \circ y) \leqslant w$ во всякой точке $x \circ y$, лежащей на кривой K, и гармонична во всякой точке, внутренней относительно K; тогда $f(x \circ y) \leqslant w$ во всякой точке, не являющейся внешней относительно K. Из этого утверждения непосредственно следует единственность функции g, удовлетворяющей условиям теоремы.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского
государственного университета

Ս. Ն. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

Դիրիխլեի խնդիրը կոնստրուկտիվ անալիզում

Ապացուցվում է Դիրիխլեի խնդրի կոնստրուկտիվ լուծման գոյության մասին հետևյալ թեորեմը՝

Դիցուք K կոնստրուկտիվ կոնտինենտ փակ կորը հավասարաչափ անընդհատ է $a\Delta b$-ի վրա, f ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է K-ի վրա։

Դիցուք գոյություն ունեն A և B ալգորիթմներ, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

1) A ալգորիթմը ամեն մի բնական թիվ ձևափոխում է $a\Delta b$-ին պատկանող FR-թվի։

2) B ալգորիթմը ամեն մի n բնական թիվ ձևափոխում է այնպիսի հատվածի, որի սկզբնակետն է $K(A(n))$, իսկ սկզբնակետից տարբեր ամեն մի կետ արտաքին է K-ի նկատմամբ։

3) $a\Delta b$-ին պատկանող ամեն մի t FR-թվի համար գոյություն ունի $K(t)\Delta x\sigma y$ տեսքի (որտեղ $x\sigma y$-ը հարթության ինչ որ կետ է) այնպիսի հատված, որի $K(t)$-ից տարբեր յուրաքանչյուր կետ արտաքին է K-ի նկատմամբ և $K(t)\Delta x\sigma y$ հանդիսանում է B հաջորդականության ինչ-որ ենթահաջորդականության սահման։ Այդ դեպքում գոյություն ունի կոնստրուկտիվ երկտեղանի g ֆունկցիա, որն հավասարաչափ անընդհատ է K կորով սահմանափակված փակ տիրույթում, K կորի վրա համընկնում է f ֆունկցիայի հետ և K-ի նկատմամբ ներքին ամեն մի կետում հարմոնիկ է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. А. Кушнер*, Лекции по конструктивному математическому анализу, Наука, М., 1973. [2] *И. Д. Заславский, С. Н. Манукян*, Тр. ВЦ АН АрмССР и ЕГУ. Мат. вопр. кибернетики и вычислительной техники, т. 5 (1968). [3] *А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов*, Введение в теорию гармонических функций, Наука, М., 1968. [4] *В. А. Лифшиц*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 20. Исследования по конструктивной математике и мат. логике, вып. 4 (1971).