ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIX 1984 2

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян

О напряженном состоянии бесконечного пространства, ослабленного двумя одинаковыми разрезами в виде полуплоскостей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 12/VII 1983)

Многие результаты по исследованию обширных классов смешанных задач для деформируемых тел, содержащих разрезы различных геометрических форм, изложены в ([1,2]).

В настоящей работе на основе аппарата сфероидальных волновых функций строится замкнутое решение указанной в заголовке задачи и формулируется энергетическое условие распространения трещины.

1. Пусть бесконечное пространство, отнесенное к правой системе прямоугольных координат $Oxyz$, содержит два одинаковых разреза в виде полуплоскостей $\omega=\{z=0;\ -\infty<x<\infty,\ |y|\geqslant a\}$, берега (верхняя и нижняя поверхности) которых загружены одинаковыми по величине и противоположными по направлению нормальными силами интенсивности $p(x, y)$, причем $p(-x, y)=p(x, y)$ и $p(x, -y)=p(x, y)$.

Будем предполагать, что материал пространства подчиняется степенной физической зависимости $\sigma_i=K\varepsilon_i^{\mu}$ $(0<\mu\leqslant1)$, где σ_i и ε_i, соответственно, интенсивности напряжений и скоростей деформаций, а K и μ—физические константы ([3]). Требуется определить раскрытие разрезов и нормальные напряжения вне разрезов.

Основные уравнения поставленной задачи в рамках обобщенного принципа суперпозиции перемещений ([3]) в образах Фурье имеют вид ([4])

$$\left(\frac{d}{dy}-\lambda\right)\int\limits_L\frac{K_\gamma(|\lambda||y-\eta|)}{|y-\eta|^\gamma}\left[\frac{d\varphi_\lambda(\eta)}{d\eta}+\lambda\varphi_\lambda(\eta)\right]d\eta=-g_\gamma(\lambda)p_\lambda(y)\quad(y\in L);\tag{1.1}$$

$$\sigma_\lambda(y)=-[g_\gamma(\lambda)]^{-1}\left(\frac{d}{dy}-\lambda\right)\int\limits_L\frac{K_\gamma(|\lambda||y-\eta|)}{|y-\eta|^\gamma}\left[\frac{d\varphi_\lambda(\eta)}{d\eta}+\lambda\varphi_\lambda(\eta)\right]d\eta\quad(|y|<a)\tag{1.2}$$

$$g_\gamma(\lambda)=\pi\sqrt{\pi}(2\theta)^\mu 2^{\gamma+1}\Gamma(\gamma+1/2)|\lambda|^{-\gamma};\quad\gamma=(\mu-1)/2;$$

$$L=\{z=0;\ |y|>a\};\ 2/3<\mu\leqslant1;\ -\infty<\lambda<\infty.$$

Здесь $K_\gamma(y)$—функция Макдональда, $\Gamma(y)$—гамма-функция Эйлера, θ—определенная константа, функция $\varphi(x, y)$ характеризует раскрытие берегов разрезов, $\sigma(x, y)$—нормальные напряжения вне разрезов, взятые с обратным знаком, а $\varphi_\lambda(y)$, $\sigma_\lambda(y)$ и $p_\lambda(y)$—образы Фурье по переменной x функций $\varphi(x, y)$, $\sigma(x, y)$ и $p(x, y)$ соответственно (λ — параметр преобразования Фурье).

Интегро-дифференциальное уравнение (1.1) должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi_\lambda(\pm a)=0, \tag{1.3}$$

выражающих условия непрерывности вертикальных перемещений (точнее, вертикальных скоростей) на краях разрезов.

Уравнениями (1.1)—(1.2) описывается обсуждаемая задача также в постановке линейной теории упругости, когда модуль упругости материала пространства по вертикальной координате z изменяется по степенному закону $E(z)=E_\alpha|z|^\alpha$ $(0\leqslant\alpha<1)$. На основе известных результатов [5] находим, что в этом случае постоянную $(2\theta)^\mu$ следует заменить постоянной $A_\alpha=\sqrt{\pi}\Theta_\alpha[\cos(\pi\alpha/2)\Gamma(1-\alpha/2)\Gamma(1+\alpha/2)]^{-1}$, где Θ_α — определенная константа из [5], и во всех остальных местах параметр μ надо заменить параметром $1-\alpha$.

Так как $p(-x, y)=p(x, y)$, то в уравнениях (1.1)—(1.2) можно заменить λ на $-\lambda$, причем $\varphi_{-\lambda}(y)=\varphi_\lambda(y)$, $\sigma_{-\lambda}(y)=\sigma_\lambda(y)$. Учитывая это замечание, уравнение (1.1) представим в следующей эквивалентной форме:

$$\int_L \frac{K_\gamma(|\lambda||y-\eta|)}{|y-\eta|^\gamma}\varphi_\lambda'(\eta)d\eta=-\frac{1}{2}g_\gamma(\lambda)[q_\lambda(y)-A(\lambda)\operatorname{sh}\lambda y]\quad(y\in L); \tag{1.4}$$

$$q_\lambda(y)=\int_L \operatorname{sgn}(y-\eta)\operatorname{ch}[\lambda(y-\eta)]p_\lambda(\eta)d\eta;\quad A(-\lambda)=-A(\lambda),$$

где $A(\lambda)$ — неизвестная пока постоянная, а $\varphi_\lambda(-y)=\varphi_\lambda(y)$, что непосредственно вытекает из заданного условия $p(x, -y)=p(x, y)$, обусловливающего симметрическое загружение берегов разрезов.

Отметим, что вместо интегро-дифференциального уравнения (1.3) можно получить интегральное уравнение относительно $\varphi_\lambda(y)$.

2. Решение уравнения (1.3) и последующее определение $\sigma_\lambda(y)$ из (1.2) основывается на соотношениях:

$$\int_a^\infty\left\{\frac{K_\gamma(|\lambda||y-\eta|)}{|y-\eta|^\gamma}\pm\frac{K_\gamma[|\lambda|(y+\eta)]}{(y+\eta)^\gamma}\right\}(\eta^2/a^2-1)^{-\varkappa/2}S_\nu^{\varkappa(3)}(\eta/a, -q)d\eta=$$
$$=\lambda^\pm_{\nu,\varkappa}(y^2/a^2-1)^{\varkappa/2}S_\nu^{\varkappa(3)}(y/a, -q)\quad(y>a); \tag{2.1}$$

$$\int_a^\infty\left\{\frac{K_\gamma(|\lambda||y-\eta|)}{|y-\eta|^\gamma}\pm\frac{K_\gamma[|\lambda|(y+\eta)]}{(y+\eta)^\gamma}\right\}(\eta^2/a^2-1)^{-\varkappa/2}S_\nu^{\varkappa(3)}(\eta/a, -q)d\eta=$$
$$=h^\pm_{\nu,\varkappa}(1-y^2/a^2)^{\varkappa/2}H^\pm_{\nu,\varkappa}[\arccos(y/a)]\quad(0<y<a); \tag{2.2}$$

$$H^\pm_{\nu,\varkappa}[\arccos(y/a)]=P^\varkappa s_\nu(y/a, -q)\pm\frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\left[\begin{matrix}\operatorname{tg}(\pi\delta)\\ \operatorname{ctg}(\pi\delta)\end{matrix}\quad Q^\varkappa_{s_\nu}(y/a, -q)\right];$$

$$\nu=-1/2+i\tau\,(\tau>0);\ \varkappa=1/2-\gamma=1-\mu/2;\ \delta=(\gamma-i\tau)/2$$

$$q=a^2\lambda^2/4;\ \overline{\lambda^\pm_{\nu,\varkappa}}=\lambda^\pm_{\nu,\varkappa};\ \overline{h^\pm_{\nu,\varkappa}}=-ih^\pm_{\nu,\varkappa}.$$

В (2.1)—(2.2) $Ps_\nu^\varkappa(y/a, -q)$, $Qs_\nu^\varkappa(y/a, -q)$ и $S_\nu^{\varkappa(3)}(y/a, -q)$ — сфероидальные волновые функции ([6]), выражающиеся рядами по функциям Лежандра $P^\varkappa_{\nu+2k}(y/a)$, $Q^\varkappa_{\nu+2k}(y/a)$ и по функциям Макдональда $K_{\nu+2k}(2\sqrt{q}y/a)$ $(k=0\pm 1, \ldots)$, соответственно, а $\lambda^\pm_{\nu,\varkappa}$ и $h^\pm_{\nu,\varkappa}$ — определенные константы, выражающиеся бесконечными рядами. Формулы разложения произвольной функции по функциям $S_\nu^{\varkappa(3)}(y/a, -q)$ можно получить известным методом Вейля—Титчмарша ([7]). Они имеют вид:

$$F(\tau)=\int\limits_a^\infty S_\nu^{\varkappa(3)}(y/a, -q)f(y)dy;$$

$$f(y)=a^{-1}\int\limits_0^\infty S_\nu^{\varkappa(3)}(y/a, -q)F(\tau)\sigma(\tau)\tau d\tau, \tag{2.3}$$

где $\sigma(\tau)$ — соответствующая спектральная плотность, выражающаяся явно характеристиками функции $S_\nu^{\varkappa(3)}(y/a, -q)$. Интегральные соотношения (2.1)—(2.2) можно получить методами теории обобщенного потенциала при помощи результатов работ ([8-10]).

Теперь, исходя из (2.1), положим

$$\varphi_\lambda'(y)=(y^2/a^2-1)^{-\varkappa/2}\int\limits_0^\infty \Phi_\lambda(\tau, -q)S_\nu^{\varkappa(3)}(y/a, -q)d\tau \quad (y>a). \tag{2.4}$$

Далее воспользуемся соотношением (2.1), когда берется знак минус, формулами (2.3), и учтем граничные условия (1.3). В результате после некоторых преобразований находим:

$$\varphi_\lambda(y)=\int\limits_0^\infty \Phi_\lambda(\tau, -q)G_\nu^\varkappa(y, -q)d\tau \quad (y>a); \tag{2.5}$$

$$\Phi_\lambda(\tau, -q)=-\frac{g_\nu^-(\lambda)\sigma(\tau)\tau}{2a\lambda^-_{\nu\varkappa}}\left[Q_\lambda^\varkappa(\tau)-AS_\lambda^\varkappa(\tau)\right];$$

$$G_\nu^\varkappa(y, -q)=\int\limits_y^\infty(\eta^2/a^2-1)^{-\varkappa/2}S_\nu^{\varkappa(3)}(\eta/a, -q)d\eta;$$

$$Q_\lambda^\varkappa(\tau)=\int\limits_a^\infty S_\nu^{\varkappa(3)}(y/a, -q)q_\lambda(y)(y^2/a^2-1)^{-\varkappa/2}dy;$$

$$S_\lambda^\varkappa(\tau)=\int\limits_a^\infty S_\nu^{\varkappa(3)}(y/a, -q)\,\mathrm{sh}(\lambda y)(y^2/a^2-1)^{-\varkappa/2}dy;$$

$$A=\int\limits_0^\infty\frac{\sigma(\tau)\tau}{\lambda^-_{\nu,\varkappa}}Q_\lambda^\varkappa(\tau)G_\nu^\varkappa(a, -q)d\tau\times\left|\int\limits_0^\infty\frac{\sigma(\tau)\tau}{\lambda^-_{\nu,\varkappa}}S_\lambda^\varkappa(\tau)G_\nu^\varkappa(a, -q)d\tau\right|^{-1}.$$

3. Для определения $\sigma_\lambda(y)$ при $0<y<a$, т. е. вне разрезов, следует выражения $\varphi_\lambda'(y)$ и $\varphi_\lambda(y)$ из (2.4)—(2.5) подставить в (1.2) и воспользоваться соотношением (2.2) при знаке минус. Однако важнее получить асимптотическое представление $\sigma_\lambda(y)$ при $y\to a-0$. С

этой целью заметим, что при помощи формулы дифференцирования функции Макдональда можем записать:

$$\frac{d}{dy}\left[|y-\eta|^{-\gamma}K_\gamma(|\lambda||y-\eta|)\right]\simeq-\Gamma(1+\gamma)|\lambda|^{-\gamma}2^{\gamma}\operatorname{sgn}(y-\eta)|y-\eta|^{-\mu}(y-\eta\to 0). \quad (3.1)$$

Далее, ядро в (2.1) представим в виде суммы своей главной и регулярной частей, причем главная часть, являющаяся ядром основных интегральных уравнений в соответствующих плоских задачах о разрезах, определяется соотношением (3.1). После этого анализируется структура каждого из четырех слагаемых в (1.2). На основе (2.4)—(2.5) и результатов работы ([11]) легко показать, что главный член асимптотики $\sigma_\lambda(y)$ при $y\to a-0$ определяется первым слагаемым, содержащим производную как вне интеграла, так и под интегралом. Идя по такому пути, при помощи (2.2) находим

$$\sigma_\lambda(y)\simeq-K_\lambda(a-y)^{-\gamma-1/2}\quad y\to a-0;$$

$$K_\lambda=\frac{\pi E_\gamma[g_\gamma(\lambda)]^{-1}}{2^{2\gamma}a^{3\gamma+5/2}}\int_0^\infty\frac{h^-_{\nu,\varkappa}}{\lambda^-_{\nu,\varkappa}}k^-_{\nu,\varkappa}\Phi_\lambda(\tau,\ -q)d\tau; \quad (3.2)$$

$$E_\gamma=\pi^{-1/2}2^{\gamma-1}|\lambda|^{-\gamma}\Gamma(\gamma+1/2),$$

где $k^-_{\nu,\varkappa}$—определенная функция, зависящая от τ, а K_λ—коэффициент интенсивности образа Фурье нормальных напряжений $\sigma_\lambda(y)$ на крае $y=a$ разрезов.

Обращаясь затем к обобщенным вертикальным перемещениям граничных точек верхнего полупространства $z>0$:

$$w(x,\ y)=\vartheta^\mu\iint\limits_\Pi\frac{q(\xi,\ \eta)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1-\mu/2}}\ ((x,\ y)\in\Pi);$$

$$q(x,\ y)=\begin{cases}p(x,\ y),\ (x,\ y)\in\omega\\ \sigma(x,\ y),\ (x,\ y)\in\Pi/\omega\end{cases};\quad \Pi=\{z=0;\ |x|<\infty,\ |y|<\infty\},$$

при помощи (3.2) известным методом Лайтхилла ([12]) получим

$$w_\lambda(y)=\begin{cases}2\pi\mu^{-1}(2\vartheta)^\mu K_\lambda(y-a)^{\mu/2}, & y\to a+0\\ 0, & y\to a-0\end{cases} \quad (3.3)$$

Теперь запишем условие распространения трещины (1.2):

$$G=-2\Gamma_0, \quad (3.4)$$

где G—интенсивность освобождающейся энергии тела (приток энергии в край трещины), расходуемой на его разрушение, а Γ_0—удельная поверхностная энергия. Для вычисления G воспользуемся приемом Ирвина ([1,2]), предполагая, что край трещины $y=a$ мысленно продвигается влево на величину Δa. Тогда

$$G=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\sigma_z(x,\ y)w(x,\ y)dxdy=4\pi^{-1}\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_0^{\Delta a}dy\int_0^\infty w_\lambda(y)\sigma_\lambda(y)d\lambda.$$

Приняв во внимание асимптотические формулы (3.2)—(3.3), условие (3.4) представим в виде

$$2\pi(2\theta)^{\mu}[\sin(\pi\mu/2)]^{-1}\int\limits_0^{\infty} K_\lambda^2 d\lambda = \Gamma_0.$$

В частном случае загружения, когда $p(x, y)=\delta(x)\delta(y)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, полученные формулы для основных характеристик задачи заметно упрощаются.

Институт механики Академии наук
Армянской ССР

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Կիսահարթությունների տեսքով երկու միատեսակ ճեղքերով թուլացված անվերջ տարածության լարվածային վիճակի մասին

Հաստատված սողքի ոչ-գծային տեսության դրվածքով լարումների և դեֆորմացիաների արագությունների ինտենսիվությունների միջև գոյություն ունի աստիճանային կախվածություն առաջին մոտավորությամբ։ Դիտարկվում է կիսահարթությունների տեսքով երկու միատեսակ ճեղքերով թուլացված անվերջ տարածության լարվածային վիճակի վերաբերյալ խառը եզրային խնդիրը։ Նորմալ լարումների և տեղափոխությունների համար ճեղքերի եզրերի շրջակայքերում ստացված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնց հիման վրա ձևակերպված է ճեղքերի տարածման էներգետիկ պայմանը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. П. Черепанов.* Механика хрупкого разрушения, Наука, М., 1974. [2] *В. З. Партон, Е. М. Морозов,* Механика упруго-пластического разрушения, Наука, М., 1974. [3] *Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян,* ПММ, т. 27, вып. 5 (1963). [4] *С. М. Мхитарян,* ДАН АрмССР, т. 74, № 1 (1982). [5] *Г. Я. Попов,* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Вища школа, Киев—Одесса, 1982. [6] *Г. Бейтмен, Л. Эрдейи,* Высшие трансцендентные функции, т. III, Наука, М., 1967. [7] *Э. Ч. Титчмарш,* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ИЛ, М., 1960. [8] *А. Х. Раков, В. Л. Рвачев,* ДАН УССР, т. 3, № 3 (1961). [9] *С. М. Мхитарян,* Изв. АН СССР. МТТ, № 1 (1983). [10] *С. М. Мхитарян,* ПММ, т. 47, вып. 2 (1983). [11] *К. Д. Сакалюк,* Уч. зап. Кишиневского гос. ун-та, т. 50 (1962). [12] *M. J. Lighthill,* Introduction to Fourier Analysis and Generaliaed Functions, Cambridge Uni-ty Press, Cambr., 1959.