ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 2

УДК 621.382.8

КИБЕРНЕТИКА

С. О. Мкртчян

Импликаторы—логические элементы цифровой техники

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. Л. Арешяном 18/IV 1983)

Современные ЭВМ и другие устройства автоматики дискретного действия строятся в основном на элементах, реализующих логические операции *конъюнкции* (И), *дизъюнкции* (ИЛИ) и *отрицания* (НЕ). Это обусловлено тем, что операции И ($\wedge$), ИЛИ ($\vee$) и НЕ ($-$) вместе с логическими переменными x_i и константами 1 и 0 составляют алгебру Буля. В терминах исчисления высказываний это означает, что любая тождественно истинная формула может быть выведена из тождественно истинных формул конъюнкции, дизъюнкции и отрицания ([1]). На языке переключательных схем это означает, что логические элементы И, ИЛИ, НЕ образуют функционально полную систему, т. е. переключательная схема любой сложности может быть реализована на подобных элементах ([2]). По не вполне понятной причине остаются пока недостаточно исследованными вопросы использования в цифровой технике в качестве базисных других элементарных функций алгебры логики, таких как функции *импликации, равнозначности (эквивалентности)* и пр.

В данной работе сделана попытка показать, что в условиях современных достижений интегральной электроники в качестве базисной функции для синтеза цифровых автоматов не менее эффективно, чем существующие, может быть использована логическая функция *импликации*.

В пределах исчисления высказываний математической логики функция импликации определяется приведенной таблицей истинности (табл. 1).

Таблица 1

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Здесь x_1, x_2—элементарные высказывания или логические переменные, f—результирующее высказывание или логическая функция. $x=0$ означает, что данное высказывание *ложно*, а $x=1$—*истинно*.

Аналитически функция импликации записывается так:

$$f = x_1 \to x_2$$

и читается «x_1 имплицирует x_2», или «x_1 является следствием x_2». Эта формула иногда называется *булевым неравенством.*

Как и элементарные функции логического сложения (ИЛИ) и логического умножения (И), импликация (ИМ), отдельно взятая, не составляет функционально полную систему в указанном выше смысле. Для этого необходимо иметь еще одну элементарную функцию—отрицание (НЕ). Через импликацию и отрицание можно выражать любую формулу алгебры логики.

Известно, что число всевозможных логических функций n переменных равно 2^{2^n}. Это множество функций включает в себя также константы 0 и 1, логические переменные $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и их отрицания $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots$. В случае $n=2$ число функций равно 16. В табл. 2 приведены эти 16 функций в классическом базисе $\wedge$, $\vee$, $-$ и в базисе $\to$, $-$.

Таблица 2

№ функции	В базисе $\wedge, \vee, -$	В базисе $\to, -$
1	$0 \equiv x_1 \wedge \bar{x}_1$	$0 \equiv \overline{(x_1 \to x_1)}$
2	$1 \equiv x_1 \vee \bar{x}_1$	$1 \equiv x_1 \to x_1$
3	$x_1 \equiv (x_1 \vee x_1) \wedge x_1$	$x_1 \equiv (x_1 \to x_1) \to x_1$
4	$x_2 \equiv (x_2 \vee x_2) \wedge x_2$	$x_2 \equiv (x_2 \to x_2) \to x_2$
5	$\bar{x}_1 \equiv \overline{(x_1 \vee x_1)}$	$\bar{x}_1 \equiv x_1 \to \overline{(x_1 \to x_1)}$
6	$\bar{x}_2 \equiv \overline{(x_2 \vee x_2)}$	$\bar{x}_2 \equiv x_2 \to \overline{(x_2 \to x_2)}$
7	$x_1 \vee x_2$	$\bar{x}_1 \to x_2$
8	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$x_2 \to x_1$
9	$\bar{x}_1 \vee x_2$	$x_1 \to x_2$
10	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	$x_1 \to \bar{x}_2$
11	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{(x_1 \to \bar{x}_2)}$
12	$x_1 \wedge \bar{x}_2$	$\overline{(x_1 \to x_2)}$
13	$\bar{x}_1 \wedge x_2$	$\overline{(x_2 \to x_1)}$
14	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$	$\overline{(\bar{x}_1 \to x_2)}$
15	$(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$	$(x_1 \to x_2) \to \overline{(x_2 \to x_1)}$
16	$(x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$	$(x_1 \to \bar{x}_2) \to \overline{(\bar{x}_1 \to x_2)}$

Пользуясь законами алгебры логики, можно доказать тождественное равенство соответствующих формул левой и правой колонок таблицы. Наиболее простым способом доказательства является следующий. Для каждой функции составляется таблица истинности. Ес-

ли таблицы двух функций полностью совпадают, то соответствующие формулы тождественно равны. Аналогичным образом можно доказать тождественно истинные (константа 1 или тавтология) и тождественно ложные (константа 0 или противоречие) формулы. Тождественное равенство формул можно доказать также путем последовательных подстановок. Например, пусть дана формула: $F=(((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1) \rightarrow x_1)$.

Учитывая, что $x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$, и производя соответствующие подстановки, получим

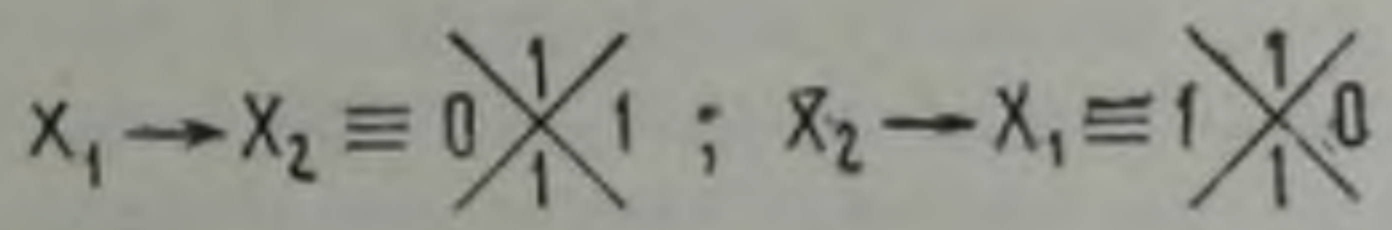
$$F=\overline{((x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee x_1)} \vee x_1.$$

Пользуясь правилами де Моргана, эту функцию можно преобразовать следующим образом:

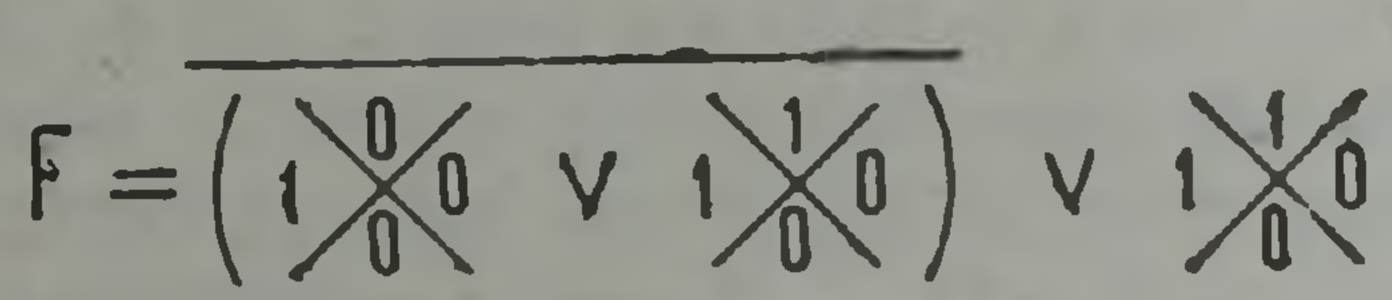
$$F=x_1 \vee \bar{x}_1 \wedge (\overline{x_1 \wedge \bar{x}_2}) = \bar{x}_1 \vee x_1 \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \equiv 1.$$

Таким образом, исходная формула F является тождественно истинной.

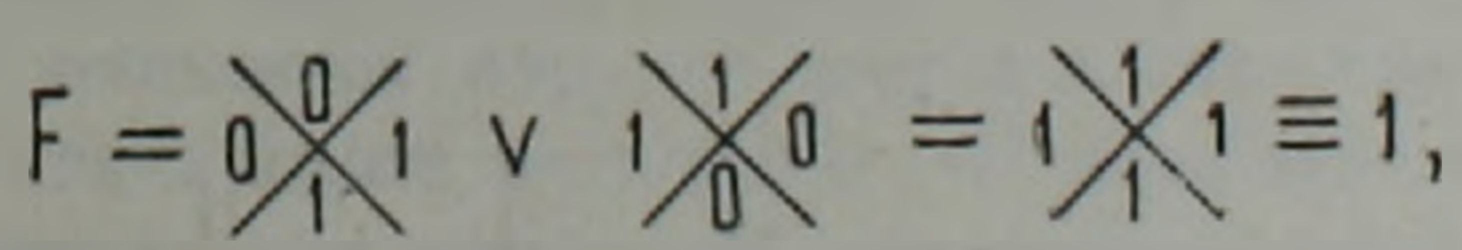
Для доказательства тождественности формул логики высказываний может успешно применяться также математический аппарат диаграмм Венна ([3]). Рассмотрим приведенный выше пример. Согласно определению функциональной диаграммы Венна имеют место следующие тождественные равенства:



Пользуясь этими равенствами, функцию F можно записать так



Преобразуя это диаграммное уравнение согласно законам преобразования функциональных диаграмм ([3]), получим



что и требовалось доказать.

Таким образом, существующий математический аппарат алгебры логики позволяет произвести тождественные преобразования с любыми логическими функциями двух переменных, написанными в базисе импликации и отрицания.

Поскольку любая логическая функция $n>2$ переменных может быть представлена в виде суперпозиций логических функций двух переменных, то через импликацию и отрицание может быть выражена любая функция алгебры логики.

Назовем *импликатором* логический элемент, реализующий функцию импликации $f=x_1 \rightarrow x_2$.

Введем условное графическое обозначение импликатора. В силу вышесказанного импликатор с инвертором на выходе составляет функционально полную систему элементов. В качестве примера построения логических устройств на импликаторах рассмотрим цепь формирования переноса двоичного сумматора. Функция переноса в минимальной дизъюнктивной форме записывается так:

$$C=(x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge c)\vee(x_2\wedge c),$$

где x_1, x_2—слагаемые данного разряда, c—перенос с младшего разряда, C—перенос в старший разряд. Пользуясь тождественно равными функциями 7 и 11 из табл. 2, функцию C запишем в импликаторной форме, причем так, чтобы перенос с младшего разряда (c) использовался только в прямом коде. Тогда получим

$$C=(\bar{x}_1\to x_2)\wedge(\bar{x}_1\to c)\wedge(\bar{x}_2\to c).$$

Пользуясь принятыми обозначениями, построим логическую схему цепи переноса двоичного сумматора. Аналогичным образом можно синтезировать логические схемы более сложных узлов цифровых автоматов.

Теперь рассмотрим электрические схемы импликаторов. При позитивной логике, т. е. когда за логическую «1» принимается высокий уровень потенциала U^1, а за логический «0»—низкий уровень потенциала U^0, функцию импликации можно реализовать на простейших электрических схемах на биполярном транзисторе или на МДП-транзисторе.

Специфика этих схем в том, что входы x_1, x_2 по своим характеристикам не эквивалентны. Например, если ток входа $x_1(I_{вх.1})$ имеет входящее направление, то ток входа $x_2(I_{вх.2})$ имеет выходящее направление. Кроме того $I_{вх.1}<I_{вх.2}$. Поэтому коэффициент нагрузки выхода схемы имеет разную величину в зависимости от характера нагрузки.

Помимо простоты одно из важных свойств электрических схем импликаторов заключается в том, что они позволяют соединение выходов по типу «монтажное И». Благодаря этому значительно упрощается реализация логических схем. Например, при реализации рассмотренной схемы цепи переноса сумматора выходной конъюнктор можно исключить, соединив выходы импликаторов непосредственно, т. е. по схеме «монтажное И». Заметим, что здесь предполагается использовать несимметричные МДП-транзисторы.

Таким образом, импликаторы наравне с конъюнкторами, дизъюнкторами и инверторами могут эффективно использоваться для построения логических узлов цифровых автоматов. Благодаря простоте технической реализации импликаторы являются перспективными элементами для больших интегральных схем (БИС).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Իմպլիկատորները—թվային տեխնիկայի տրամաբանական էլեմենտներ

Տրամաբանական ֆունկցիաները արտահայտելու համար դիզյունկցիա, կոնյունկցիա և այլ տրամաբանական գործողությունների կողքին հաջողությամբ կարող է օգտագործվել նաև իմպլիկացիա կոչվող տրամաբանական գործողությունը։ Իմպլիկացիա և բացասում գործողությունները միասին կազմում են ֆունկցիոնալ լրիվ համակարգ, այսինքն նրանց միջոցով կարող է արտահայտվել տրամաբանական հանրահաշվի ցանկացած ֆունկցիա։ Աշխատանքում բերվում են երկու փոփոխականի բոլոր 16 տրամաբանական ֆունկցիաները արտահայտված իմպլիկացիա և բացասում բազիսով։ Իմպլիկացիա գործողությունը իրականացնող տրամաբանական էլեմենտը անվանվում է իմպլիկատոր։ Բերվում է իմպլիկատորների վրա տրամաբանական հանգույցի կառուցման օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. С. Новиков*, Элементы математической логики, Физматгиз, М., 1959. [2] *Д. А. Поспелов*, Логические методы анализа и синтеза схем, Энергия, М., 1974. [3] *С. О. Мкртчян*, Нейроны и нейронные сети, Энергия, М., 1971.