ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 2

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян

Одно замечание о функциях с конечным интегралом типа Дирихле

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 27/IV 1983)

1°. Пусть E класс функций, аналитических и ограниченных в единичном круге $U=\{|z|<1\}$.

Для $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in E$ обозначим

$$\overline{M}(r, f)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n, \qquad 0<r<1.$$

Г. Харди [1] доказано, что для любой $f\in E$

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{\frac{1}{2}}\,\overline{M}(r, f)=0.$$

Пусть теперь $D_\alpha (0\leqslant\alpha<\infty)$ класс функций f, аналитических в U таких, что

$$S_\alpha(f)=\iint\limits_{(U)}(1-r^2)^\alpha|f'(re^{i\varphi})|^2 r\,dr\,d\varphi<+\infty.$$

Легко усмотреть, что при $\alpha=0$ класс функций D_0 совпадает с обычным классом аналитических в U функций с конечным интегралом Дирихле и $D_0\subset D_\alpha$.

В. Коулинг [2] доказал, что если $f\in D_0$, то

$$\lim_{r\to 1}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-\frac{1}{2}}\overline{M}(r, f)=0. \tag{1}$$

Обозначим для $f\in D_\alpha$

$$M(r, f)=\max_{|z|=r}|f(z)|, \qquad 0<r<1,$$

заметим, что

$$M(r, f)\leqslant\overline{M}(r, f), \quad 0<r<1.$$

С. Уамасита [3] доказывается, что $-\dfrac{1}{2}$ в равенстве (1) наилучшее возможное значение, а именно, для любой константы p, $0<p<\dfrac{1}{2}$ существует $f\in D_0$ такая, что

$$\lim_{r\to 1}\inf\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-p}M(r, f)\geqslant 1.$$

В настоящей заметке аналогичные результаты получены для функций классов D_α при $0<\alpha<\infty$.

2°. Заметим сначала, что при $0<\alpha<\infty$ функция

$$\frac{\alpha}{(1-z)^{\alpha+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+k)}z^k \quad (|z|<1) \tag{2}$$

аналитична в U и что для

$$\int_0^1(1-r^2)^{\alpha-1}r^{2n+1}dr=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+n)}{2\Gamma(\alpha+1+n)}=\gamma(\alpha,\ n)$$

имеем (([4]), с. 885)

$$\gamma(\alpha,\ n)=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $f(z)\in D_\alpha$, $0<\alpha<\infty$. Тогда*

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{\frac{\alpha}{2}}\overline{M}(r,\ f)=0. \tag{4}$$

Доказательство. Легко усмотреть что

$$S_\alpha(f)=\int_0^1(1-r^2)^{\alpha}dr\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2n^2r^{2n-1}d\varphi=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2n^2\int_0^1(1-r^2)^{\alpha}r^{2n-1}dr=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2n\alpha\cdot\gamma(\alpha,\ n)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2W_\alpha(n)<+\infty, \tag{5}$$

где

$$W_\alpha(n)=n\alpha\gamma(\alpha,\ n)=O(n^{1-\alpha}), \tag{6}$$

согласно (3).

Пусть $\varepsilon>0$ задано, выберем целое число k так, чтобы

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n|^2W_\alpha(n)<\varepsilon.$$

Напишем $\overline{M}(r,\ f)$ в следующем виде:

$$\overline{M}(r,\ f)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n=\sum_{n=0}^{k}|a_n|r^n+\sum_{n=k+1}^{\infty}[W_\alpha(n)]^{1/2}|a_n|[W_\alpha(n)]^{-1/2}r^n.$$

Применяя теперь неравенство Шварца, получим

$$\overline{M}(r,\ f)\leqslant\sum_{n=0}^{k}|a_n|r^n+\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n|^2W_\alpha(n)\cdot\sum_{n=k+1}^{\infty}[W_\alpha(n)]^{-1}r^{2n}\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{k}|a_n|r^n+\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n|^2W_\alpha(n)\right)^{1/2}\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2\Gamma(\alpha+1+n)}{n\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+n)}r^{2n}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Так как, интегрируя равенство (2) при $z=r$ в пределах от нуля до r, легко усмотреть, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{n\Gamma(\alpha)\Gamma(1+n)}r^{n+1}\leqslant\frac{c}{(1-r)^{\alpha}},$$

где через c в дальнейшем будем обозначать постоянные, то из (7) получим

$$\overline{M}(r, f) \leqslant \sum_{n=0}^{k} |a_n| r^n + c\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^2 W_\alpha(n)\right)^{1/2} (1-r)^{-\alpha/2}.$$

Отсюда имеем

$$\lim_{r\to 1} \sup \overline{M}(r, f)(1-r)^{\alpha/2} \leqslant \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^2 W_\alpha(n)\right)^{1/2}.$$

Так как левая сторона неравенства не зависит от k, то отсюда вытекает доказательство теоремы.

3°. Докажем теперь, что в теореме 1 величина $\frac{1}{2}$ наилучшее возможное значение.

Теорема 2. *Для любой константы p, удовлетворяющей условию $0 < p < \frac{1}{2}$, в единичном круге U существует функция $\varphi \in D_\alpha$ такая, что*

$$\lim_{r\to 1} \inf (1-r)^{p\alpha} M(r, \varphi) \geqslant 1. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(z) = (1-z)^{-p\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

где согласно (2)

$$b_k = \frac{\Gamma(p\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha p)\Gamma(1+k)}$$

и по (3) имеет следующий порядок:

$$b_k = O(k^{-1+p\alpha}).$$

Имея в виду равенства (5) и (6), получим

$$S_\alpha(\varphi) = c\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 n^{1-\alpha} = c\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\alpha} \cdot n^{-2+2p\alpha} = c\sum_{n=1}^{\infty} n^{(2p-1)\alpha-1},$$

следовательно $S_\alpha(\varphi) < +\infty$, так как $2p-1 < 0$. Неравенство (8) теперь следует в виду того, что

$$M(r, \varphi) \geqslant \varphi(r) = (1-r)^{-p\alpha}, \quad 0 < r < 1.$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Մի դիտողություն Դիրիխլեի տիպի վերջավոր ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների մասին

Կասենք, որ $U = \{|z| < 1\}$ միավոր շրջանում անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիան D_α դասից է $0 < \alpha < \infty$ արժեքների համար, եթե

$$\iint_U (1-r^2)^\alpha |f'(re^{i\varphi})|^2 r\,dr\,d\varphi < \infty:$$

Նշանակենք $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in D_a$ ֆունկցիայի համար

$$\overline{M}(r, f)=\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n:$$

Ներկա աշխատանքում ապացուցված է, որ

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{\frac{1}{2}}\overline{M}(r, f)=0:$$

Ապացուցված է նաև, որ այս հավասարությունը կարող է խախտվել, եթե նրանում $\frac{1}{2}$-ը փոխարինենք որևէ p-ով, այնպիսին, որ $0<p<\frac{1}{2}$:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *G. Hardy*, Quart. J. Math., v. 44, 147—160 (1913). [2] *V. Cowling*, Amer. Math. Monthly, v. 66, 119—120 (1959). [3] *S. Yamashita*, Amer. Math. Monthly, v. 87 № 7 (1980) [4] *Н. Бари*, Тригонометрические ряды, ИЛ, М., 1961.