

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

М. И. Островский

Связь растворов подпространств с размерностью и другими изоморфными инвариантами

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 14/III 1984)

Пусть X и Y — замкнутые подпространства банахова пространства Z , $S(X)$ и $S(Y)$ — их единичные сферы. Раствором X и Y называется ⁽¹⁾ величина

$$\Theta(X, Y) = \max\{\sup_{x \in S(X)} \text{dist}(x, Y), \sup_{y \in S(Y)} \text{dist}(y, X)\}.$$

Сферическим раствором X и Y называется ⁽²⁾ величина

$$\Omega(X, Y) = \max\{\sup_{x \in S(X)} \text{dist}(x, S(Y)), \sup_{y \in S(Y)} \text{dist}(y, S(X))\}.$$

Через $\dim X$ обозначим минимальную мощность множества, плотного в X . В работе ⁽¹⁾ установлен следующий факт:

$$\Theta(X, Y) < 1/2 \Rightarrow \dim X = \dim Y. \quad (1)$$

Очевидно, что из равенства $\dim X = \dim Y$ не следует, вообще говоря, хотя бы одно из равенств: $\dim X^* = \dim Y^*$, $\dim X^{**} = \dim Y^{**}$, В настоящей работе будет установлено, что при условии $\Theta(X, Y) < 1/2$ совпадают размерности сопряженных пространств X и Y не только конечного, но и трансфинитного порядков. Сопряженные трансфинитного порядка определяются (⁽³⁾, с. 125) так. Имеем цепь канонических вложений $X \subset X^{**} \subset X^{****} \subset X^{(6)} \subset \dots \subset X^{(2n)} \subset$

$\subset \dots$. Определим $X^{(\omega)}$ как пополнение $\bigcup_{n=0}^{\infty} X^{(2n)}$ и, продолжая построение по индукции, построим $X^{(\alpha)}$ для любого четного ординала, т. е. ординала вида $\beta + 2n$, где β — предельный ординал. Для нечетных ординалов, т. е. ординалов вида $\beta + 2n + 1$, полагаем $X^{(\beta + 2n + 1)} = (X^{(\beta + 2n)})^*$.

Теорема 1. Для всех ординалов α (как четных, так и нечетных) выполняется

$$\Theta(X, Y) < 1/2 \Rightarrow \dim X^{(\alpha)} = \dim Y^{(\alpha)}. \quad (2)$$

Теорема 1 позволяет иным путем получить следующий результат (^(4,5)): если X, Y — сепарабельны, X — рефлексивно, а Y — нет, то $\Theta(X, Y) \geq 1/2$. Для этого достаточно сопоставить ее со следующим результатом (⁽⁶⁾, с. 562): если X нереплексивно, то $X^{(\alpha)}$ при $\alpha = \omega^2 + 1$ несепарабельно.

Назовем, следуя (^(7,8)), WCG-пространством банахово пространство, в котором существует слабо компактное множество $K \subset X$ с плот-

ной линейной оболочкой. Примерами WCG-пространств являются сепарабельные, рефлексивные, $c_0(\Gamma)$.

Теорема 2. Если X и Y являются WCG-пространствами, то $\Theta(X, Y) < 1 \Rightarrow \dim X = \dim Y$.

Известно ⁽²⁾, что в общем случае растворы Θ и Ω связаны только неравенствами $\Theta \leq \Omega \leq 2\Theta$. Поэтому условие $\Theta(X, Y) < 1$ слабее условия $\Theta(X, Y) < 1/2$.

В работе ⁽¹⁾ было установлено также, что

$$\Theta(X, Y) < 1/2 \Rightarrow \dim(Z/X) = \dim(Z/Y). \quad (3)$$

Чтобы сформулировать результат, дающий усиление этого, введем два определения. Пусть X — банахово пространство, Γ — множество. Обозначим через $l_\infty(\Gamma, X)$ пространство функций $x: \Gamma \rightarrow X$, для которых $\sup_{\gamma \in \Gamma} \|x(\gamma)\|_X < \infty$ с нормой $\|x\| = \sup_{\gamma \in \Gamma} \|x(\gamma)\|_X$. Пусть $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ — некоторое множество элементов единичной сферы $l_1(\Gamma)$. Каждый элемент из $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ порождает оператор $l_\infty(\Gamma, X) \rightarrow X$ (который мы также обозначим F_α), определенный формулой $F_\alpha x = \sum_{\gamma \in \Gamma} F_\alpha(\gamma) x(\gamma)$; норма этого оператора, очевидно, равна 1.

Определение 1. Будем говорить, что множество $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ отделено от нуля в X , если существует $x \in l_\infty(\Gamma, X)$, для которого $\inf_{\alpha} \|F_\alpha x\| > 0$.

Определение 2. Показателем множества (F_α) в X назовем величину $h(X, (F_\alpha))$ супремума тех δ , для которых существует $x \in S(l_\infty(\Gamma, X))$ с $\inf_{\alpha} \|F_\alpha x\| \geq \delta$.

Теорема 3. Пусть X и Y — подпространства банахова пространства Z . Для любого множества (F_α) имеем:

$$h(Z/X, (F_\alpha)) - h(Z/Y, (F_\alpha)) \leq \Theta(X, Y) \cdot (h(Z/Y, (F_\alpha)) + 1).$$

Соотношение (3) получается, если $\text{card } \Gamma = \max(\dim X, \dim Y)$, а (F_α) — всевозможные элементы $S(l_1(\Gamma))$ с двухточечными носителями и такие, что в одной точке носителя их значение равно $1/2$, а в другой — $(-1/2)$.

Из теоремы 3 и предложения 1 из ⁽⁵⁾ получаем

Следствие 1. Если $\Theta(X, Y) < 1/2$ и Z/X рефлексивно (обладает свойством Банаха — Сакса), то и Z/Y рефлексивно (обладает свойством Банаха — Сакса).

Следствие 2. Если $\Theta(X, Y) < 1$ и Z/X суперрефлексивно (В-выпукло, обладает знакопеременным свойством Банаха — Сакса, содержит подпространство, изоморфное l_1), то и Z/Y суперрефлексивно (В-выпукло, обладает знакопеременным свойством Банаха — Сакса, содержит подпространство, изоморфное l_1).

Доказательство теоремы 1. Для $X \subset Z$ можно определить аннуляторы любого трансфинитного порядка, аналогично тому как определяются сопряженные трансфинитного порядка. Обозначим их $X^{(\alpha \perp)}$. Для $X^{(\alpha \perp)}, Y^{(\alpha \perp)} \subset Z^{(\alpha)}$, используя результат из ⁽¹⁾ о том, что $\Theta(X, Y) = \Theta(X^\perp, Y^\perp)$, трансфинитной индукцией получаем $\Theta(X^{(\alpha \perp)}, Y^{(\alpha \perp)}) < 1/2$. При четных α пространство $X^{(\alpha \perp)}$ канонически отождествляется с $X^{(\alpha)}$ и, используя (1), получаем: $\dim X^{(\alpha)} = \dim Y^{(\alpha)}$ для чет-

ных α . Для нечетного $\gamma = \alpha + 1$ имеем, в силу (3), $\dim(Z^{(\gamma)}/X^{(\gamma+1)}) = \dim(Z^{(\gamma)}/Y^{(\gamma+1)})$. Но $Z^{(\gamma)}/X^{(\gamma+1)}$ канонически отождествляется с $(X^{(\alpha+1)})^* = X^{(\gamma)}$, а $Z^{(\gamma)}/Y^{(\gamma+1)} = Y^{(\gamma)}$, так что $\dim X^{(\gamma)} = \dim Y^{(\gamma)}$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\dim X \leq \dim Y$ и $\Omega(X, Y) < 1 - \delta$. Пространство $M = \text{cl Lin}(X \cup Y)$ является WCG-пространством (оно порождается объединением множеств, порождающих X и Y). Из леммы 5 в ⁽⁸⁾ (с. 108) следует, что существует проектор $P: M \rightarrow X_1 \supset X$ с $\|P\| = 1$ и $\dim X_1 = \dim X$. Пусть $y \in S(Y)$, возьмем $x \in S(X)$ такой, что $\|x - y\| < 1 - \delta$. Тогда $\|Py - x\| = \|P(y - x)\| < 1 - \delta$ и, следовательно, $\|P_y\| > \delta$. Поэтому сужение P на Y является изоморфизмом Y на подпространство в X_1 , откуда $\dim Y \leq \dim X_1 = \dim X$, и, тем самым, теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть элемент $x \in l_\infty(\Gamma, Z)$ таков, что $\|x\| < 1 + \epsilon$, $Q_\alpha x \in S(l_\infty(\Gamma, Z/X))$ (через Q_X и Q_Y обозначаем фактор-отображения Z на Z/X и Z/Y соответственно) и при любом α $\|F_\alpha(Q_X x)\| \geq h(Z/X, (F_\alpha)) - \epsilon$. Найдется такое α , что $\|F_\alpha Q_Y x\| < (1 + \epsilon)h(Z/Y, (F_\alpha))$. Поэтому найдется $z \in Y$ такое, что $\|F_\alpha x - z\| < (1 + \epsilon)h(Z/Y, (F_\alpha))$. Имеем $\|z\| < (1 + \epsilon)(h(Z/Y, (F_\alpha)) + 1)$ и, поэтому, $\Theta(X, Y) \geq \text{dist}(z/\|z\|, X) = (1/\|z\|)\text{dist}(z, X) > (\|F_\alpha Q_X x\| - (1 + \epsilon)h(Z/Y, (F_\alpha)))/\|z\| > \frac{h(Z/X, (F_\alpha)) - \epsilon - (1 + \epsilon)h(Z/Y, (F_\alpha))}{(1 + \epsilon)(h(Z/Y, (F_\alpha)) + 1)}$.

Устремляя ϵ к нулю, получаем требуемое.

Выражаю благодарность М. И. Кадецу за научное руководство.

Харьковский институт инженеров коммунального строительства

Մ. Ի. ՕՍՏՐՈՎՍԿԻ

Ենթատարածությունների բացվածքի կապը չափողականության և այլ
իզոմորֆ ինվարիանտների հետ

Հոդվածում հետազոտված է Մ. Գ. Կրեյնի, Մ. Ա. Կրասնոսելսկու և Դ. Պ. Միլմանի կողմից ներմուծված (Ուկրաինական ՍՍՀ ԳԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտի աշխ. ծողովածու, 1948, հ. 11, էջ 97—112) ենթատարածությունների հացվածքի հասկացությունը: X և Y ենթատարածությունների միջև բացվածքը սահմանվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\Theta(X, Y) = \max\left\{\sup_{x \in S(X)} \text{dist}(x, Y), \sup_{y \in S(Y)} \text{dist}(y, X)\right\},$$

որտեղ $S(X)$ -ը և $S(Y)$ -ը միավոր սֆերաներ են:

Ապացուցված են թեորեմներ բացվածքի իմաստով մոտիկ ենթատարածությունների, ինչպես նաև այդպիսի ենթատարածություններով կազմված ֆակտոր-տարածությունների համանմանության մասին: Հոդվածի թեորեմները լրացնում և ուժեղացնում են վերը նշված աշխատանքի որոշ արդյունքները:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Д. П. Мильман, Сб. тр. Ин-та математики АН УССР, т. 2 (1948). ² И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, УМН, т. 14, вып. 5 (1959). ³ W. J. Davls, W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, Stud. math., v. 55, p. 123 (1976). ⁴ М. И. Островский, Теория функций, функц. анализ и их прил., вып. 42 (1984). ⁵ М. И. Островский, Теория функций, функц. анализ и их прил., вып. 44 (1984). ⁶ S. F. Bellenot, Trans. Amer. Math. Soc., v. 273, p. 551—577 (1982). ⁷ D. Amlr, J. Lindenstrauss, Ann. Math., v. 88, p. 35—46 (1968). ⁸ Д. Дустель, Геометрия банаховых пространств, Киев, Вища школа, 1980.