

УДК 535.317

ФИЗИКА

А. Г. Багдоев, Г. С. Безиргенян

О дифракции интенсивной световой волны  
 в неоднородной, кубически-нелинейной  
 среде

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 28/IV 1983)

1. Рассматривается ряд задач о взаимодействующих пучках и дифракции высокочастотных мощных световых волн в кубически-нелинейных, неоднородных средах ( $\varepsilon = \varepsilon_0(\mathbf{r}) + \varepsilon(\mathbf{r}_1)|\mathbf{E}_1|^2$ ), где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор текущей точки возмущенной области,  $|\mathbf{E}_1|$  — модуль амплитуды монохроматической волны.

Исходные уравнения Максвелла (при отсутствии сторонних токов) совместно с нелинейными материальными уравнениями для немагнитываемых ( $\mu = 1$ ) нелинейных, неоднородных изотропных сред для вектора напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля сводятся к одному уравнению <sup>(1)</sup>. Рассматривая линейно-поляризованные волны <sup>(2)</sup> ( $\mathbf{E} = |\mathbf{E}|\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e} = \text{const}$  — единичный вектор поляризации), ищем его решение в форме

$$\mathbf{E} = \text{Re}\{\mathbf{E}_1(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\}, \quad (1)$$

где  $\omega$  — основная циклическая частота, а вектор  $\mathbf{E}_1$  для задачи с двумя эйконалами взаимодействующих волн записывается в форме

$$\mathbf{E}_1 = (Ae^{ip} + Be^{iq})\mathbf{e}, \quad (2)$$

где  $A = ae^{i\varphi}$ ,  $B = be^{i\psi}$  — комплексные амплитуды, причем  $A$  и  $B$  медленно меняющиеся функции координат  $\left|\frac{\partial A}{\partial x_j}\right| \ll k|A|$ ;  $\left|\frac{\partial B}{\partial x_j}\right| \ll k|B|$ ;  $k = \sqrt{\varepsilon_0}\omega/c$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $p, q$  — основные эйконалы волн,  $a, b$  — их действительные амплитуды, а  $\varphi$  и  $\psi$  — дополнительные эйконалы возбужденных волн.

Подставив выражение  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_1$  из (1), (2) в вышеуказанное уравнение, умножив полученное уравнение поочередно на  $\exp(-ip)$  и  $\exp(-iq)$  и проведя осреднение по  $p-q$ , в отрезке  $[0, 2\pi]$  с использованием дисперсионных соотношений  $\sum_1^3 \alpha_j^2 = \sum_1^3 \beta_j^2 = k^2$  соответственно получаем параболическое уравнение для комплексных амплитуд:

$$\nabla^2 A + 2i \sum_1^3 \frac{\partial A}{\partial x_j} \alpha_j - 2i \frac{k^2}{\omega} A \left(\frac{d}{dt}\right)_+ \ln A e + \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} A(a^2 + 2b^2) = 0; \quad (3)$$

$$\nabla^2 B + 2i \sum_1^3 \frac{\partial B}{\partial x_j} \beta_j - 2i \frac{k^2}{\omega} B \left( \frac{d}{dt} \right)_- \ln B_e + \frac{\bar{\epsilon} \omega^2}{c^2} B (2a^2 + b^2) = 0, \quad (4)$$

где  $\alpha_j = \partial p / \partial x_j$ ,  $\beta_j = \partial q / \partial x_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) — компоненты волновых векторов основных волн,  $A_e = 1/\sqrt{S_1 \sqrt{\epsilon_0}}$ ,  $B_e = 1/\sqrt{S_2 \sqrt{\epsilon_0}}$  — лучевые решения,  $S_1$ ,

$S_2$  — коэффициенты расхождения лучевых трубок,  $\left( \frac{d}{dt} \right)_+ = \frac{\omega}{k^2} \sum_1^3 \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,

$\left( \frac{d}{dt} \right)_- = \frac{\omega}{k^2} \sum_1^3 \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  — производные вдоль лучей.

В дальнейшем будем рассматривать плоскую или осесимметрическую дифракционные задачи, для которых удобно вводить криволинейную систему координат следующим образом: координату  $x_1 = x$  направим вдоль лучей, а координату  $x_2 = y$  — вдоль фронтов волн, при этом предполагается, что прямая и обратные волны в точке контакта имеют общую нормаль, т. е.  $\alpha_1 = \beta_1 = -k$ ,  $\alpha_{2,3} = \beta_{2,3} = 0$ . Соответственно принятому допущению в дифракционных задачах <sup>(1,2)</sup> изменения комплексных амплитуд  $A$  и  $B$  в поперечном направлении возмущенной волновой области происходят намного быстрее, чем в продольном направлении, т. е.  $\partial A / \partial y \gg \partial A / \partial x$ ,  $\partial B / \partial y \gg \partial B / \partial x$ .

Следовательно, в уравнениях (3) и (4) можно отбросить вторые производные по  $x$  и оставить лишь вторые производные по  $y$ . Отметим, что при изучении задачи дифракции на полубесконечном, непрозрачном экране предполагаем, что в точке контакта падающей (прямой) волны с краем экрана имеет место касание и, следовательно, фронты падающих и отраженных (обратных) волн, распространяясь в прямом и обратном направлении вдоль дифракционного луча  $OP$  (рис. 1), имеют общую нормаль. При таком выборе координат и

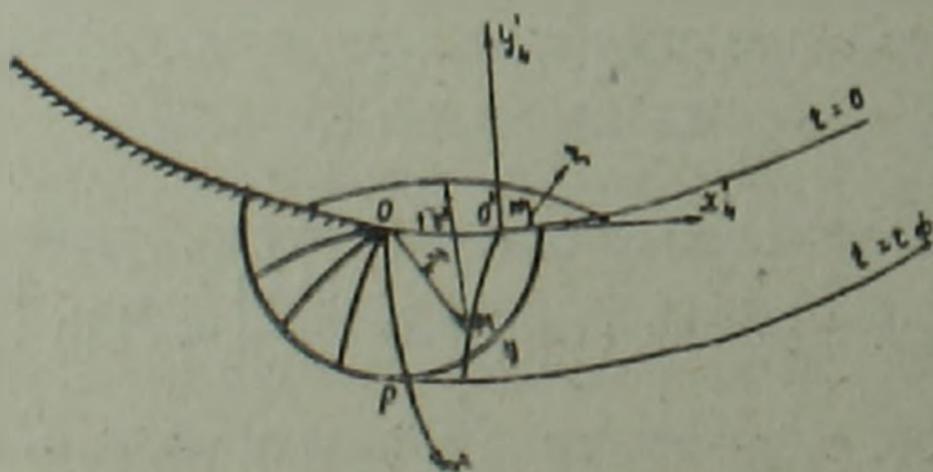


Рис. 1.

сделанном допущении уравнения для эйконалов и амплитуд запишутся в форме:

$$\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial y^2} - \bar{a} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2\bar{a}k \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{m}{y} \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} + \epsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} \bar{a} (A_e^2 \bar{a}^2 + 2B_e^2 \bar{b}^2) = 0; \quad (5)$$

$$2 \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{a} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{m}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - 2k \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + \epsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} \bar{a} (A_e^2 \bar{a}^2 + 2B_e^2 \bar{b}^2) = 0 \quad (6)$$

(уравнения для  $\bar{b}$  и  $\psi$  получаются соответственно из (5) и (6) заменой  $\bar{a}$  на  $\bar{b}$ ,  $\varphi$  на  $\psi$ ,  $k$  на  $-k$ ), где  $\bar{a} = a/A_e$ ,  $\bar{b} = b/B_e$ ,  $m=0$  соответ-

ствуется плоской, а  $m=1$  осесимметричной задаче (для однородных сред  $A_e = B_e = 1$ ).

Отметим, что уравнения для  $\bar{a}$ ,  $\varphi$ ,  $\bar{b}$ ,  $\psi$  в случае одной основной волны ( $a=0$  или  $b=0$ ) выведены в (1).

В плоском случае и при  $\epsilon_1=0$  уравнения для  $\bar{a}$ ,  $\varphi$ ,  $\bar{b}$ ,  $\psi$  исследованы на стационарную устойчивость и показано, что интервал устойчивости одной волны шире, чем для двух волн.

2. Исходя из уравнений амплитуд и эйконалов для однородной среды и осесимметричной задачи исследуем ход распространения лучей двух взаимодействующих узких гауссовых пучков с начальными почти плоскими фронтами.

Представив решение уравнений для амплитуд и эйконалов в форме

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{f_0^{m+1}}} \exp(-y^2/2y_0^2 f_0^2), \quad \varphi = k \left[ \sigma_0(x) + \frac{y^2}{2R_0(x)} \right],$$

(выражения  $b$  и  $\psi$  получаются из  $a$  и  $b$  заменой соответственно  $a_0$  на  $b_0$ ,  $f_0$  на  $f_1$ ,  $y_0$  на  $y_1$ ,  $\sigma_0$  на  $\sigma_1$  и  $R_0$  на  $R_1$ ), где  $a_0, b_0$  — начальные амплитуды волн,  $y_0, y_1$  — начальные ширины волновых пучков,  $\sigma_0, \sigma_1$  — набег фаз по оси пучков,  $R_0, R_1$  — радиусы кривизны волновых фронтов,  $f_0, f_1$  — безразмерные ширины пучков, и подставив в них, после разложения  $\exp(-y^2/2y_j^2 f_j^2)$  ( $j=0, 1$ ) в ряд и приравнивания членов нулевого и первого порядка малости по  $y^2$ , получаем уравнения для  $\sigma_0, \sigma_1, f_0, f_1$ . Отметим, что уравнения, которые получаются из (6) или из уравнения для эйконала  $\psi$  в нулевом и первом приближении по  $y^2$ , совпадают только для осесимметричной задачи ( $m=1$ ) при условиях:  $a_0 = b_0, y_0 = y_1, f_0 = f_1 = f$  и соответственно дают:

$$\frac{1}{R_0} = f'/f + \frac{3}{2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} k \frac{a_0^2}{f^2}, \quad \frac{1}{R_1} = f'/f - \frac{3}{2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} k \frac{a_0^2}{f^2}, \quad \left( f' = \frac{df}{dx} \right). \quad (7)$$

Для плоской задачи при  $\epsilon_1=0$  получаются взаимоисключающие друг друга уравнения. Поэтому для плоской диссипативной задачи решение в форме гауссовых пучков не имеет места.

Приравнявая в (5) и в уравнении для  $\bar{b}$  члены порядка  $y^2$ , получаем одинаковые по виду уравнения, в которых фигурируют соответственно  $\frac{1}{R_0}$  и  $\frac{1}{R_1}$ . Подставляя в них их выражение из (7), получаем одно и то же уравнение:

$$f'' = \frac{1}{4l_A^2 f^3} - \frac{3}{F_{\text{нл}} f^3}, \quad \text{где } \frac{1}{l_A} = \frac{2}{ky_0^2}, \quad \frac{1}{F_{\text{нл}}} = a_0^2 \left( \frac{3}{4} a_0^2 k^2 \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_0^2} + \frac{1}{y_0^2} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right). \quad (8)$$

Из уравнения (8) видно, что диссипация существенна для не очень малых амплитуд высокочастотных волн и усиливает фокусирование.

Граничные условия для симметрично расположенных одинаковых пучков зададим в форме:

$$f_j(\pm x_1) = 1, \quad \frac{df_j(\pm x_1)}{dx} = \pm \Gamma \quad (j=1, 2), \quad \Gamma = \frac{1}{R_0(x)} - 3 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} a_0^2 k. \quad (9)$$

Для выполнения условия  $f_0(x) = f_1(x)$  следует потребовать четность функции  $f(x)$ .

Интегрируя (8) с использованием вторых граничных условий (9), находим

$$ff' = \pm \sqrt{(f^2 - 1)n + \Gamma^2 f^2}, \quad \text{где } n = \frac{1}{4l_d^2} \left( 1 - 12 \frac{l_d^2}{F_{\text{пл}}} \right)^* \quad (10)$$

Рассмотрим случай  $n < 0$ , который имеет место при преобладании рефракции над дифракцией. В этом случае  $f < 1$ ,  $f' > 0$  ( $\Gamma > 0$ ), и следует в (10) брать верхний знак. Тогда из (10) при условиях (9) получаем

$$\frac{\sqrt{f^2(\Gamma^2 + n) - n}}{\Gamma^2 + n} = |x| - x_1 + \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + n} \quad (11)$$

Из решения (11) следует, что фокусирование происходит при  $x_\phi = x_1 - 1/d$  ( $d = \sqrt{-n} + \Gamma$ ). Из выражения  $x_\phi$  видно, что фокусы двух пучков располагаются к  $|x| = x_1$  примерно в  $1/\sqrt{3}$  ближе по сравнению с фокусным расстоянием для одного пучка.

Допустим, что  $x_\phi > 0$ . Тогда для значения  $x < x_\phi$   $f' < 0$ , и следует перед корнем в (10) брать нижний знак. После интегрирования получаем

$$\frac{1}{\Gamma^2 + n} (\sqrt{f^2(\Gamma^2 + n) - n}) = |x| - x_1 - \frac{1}{\Gamma^2 + n} (2\sqrt{-n} - \Gamma) \quad (12)$$

Из (12) следует, что  $f = 1$  при  $x = \tilde{x} = x_1 - 2/d$ . График функций (11), (12) изображен на рис. 2, где пунктиром проведены нереализуемые

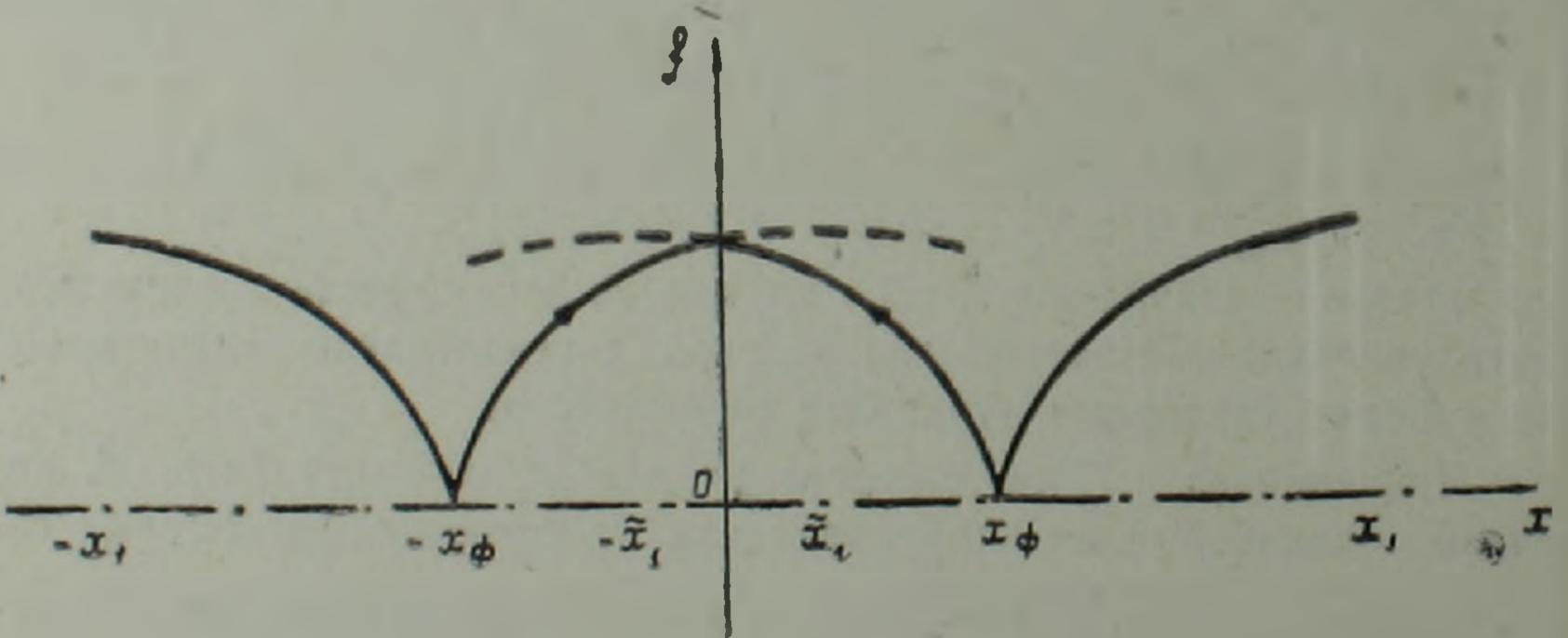


Рис. 2.

части кривых. Для получения гладкой функции, которая имеет физический смысл, следует наложить на  $x_1$  условия:  $x_1 = \frac{1}{d}$  или  $x_1 = \frac{2}{d}$

Для непрерывности уклона лучей относительно оси  $Ox$  следует считать  $\epsilon_1 = 0$ . Соответствующие кривые изображены на рис. 3.

Решения (11), (12), в которых  $|x|$  заменен на  $x$  и выбрано  $\frac{1}{R_0(x)} = 0$ , описывают также отражение волны, которая при  $x = x_1$  ста-

\* Для одного пучка второе слагаемое в скобке (10) уменьшается втрое.

новится плоской и совпадает с плоским отражателем, причем отраженные лучи совпадают с падающими; при этом решение дается правой ветвью на рис. 3, включая пунктир.

3. Пусть мощная световая волна, генерируемая лазерным гене-

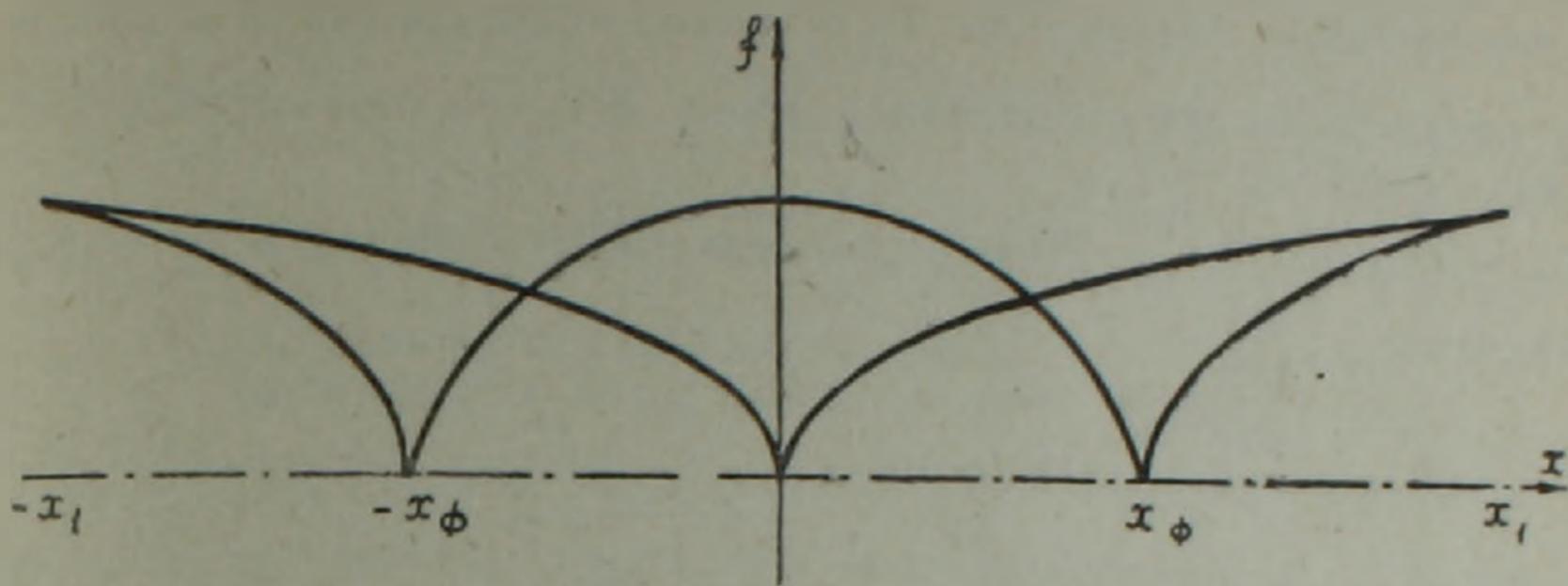


Рис. 3.

ратором, падает на непрозрачный тонкий полубесконечный экран произвольной формы. Материальная среда, в которой распространяются электромагнитные волны, предполагается изотропной, неоднородной и линейной. Допустим, что в момент  $t=0$  фронт волны касается экрана в точке  $O$  (рис. 1). Рассматривается плоская задача распространения волн с вектором  $E$ , перпендикулярным к плоскости возмущений. Обозначим через  $t=t_φ$  положение фронта падающей волны в любой момент времени  $t$ . В произвольный момент  $t$  возьмем точку  $M$ , расположенную вблизи фронта  $t=t_φ$  и дифракционного луча  $OP$ . Определим напряженность возмущенной волновой области в точке  $M$ . Следуя (3), введем координаты  $\zeta, x_4$ , где  $\zeta$  — расстояние любой точки, расположенной за фронтом  $t=0$ , до текущей точки  $N$ , расположенной на ней, а  $x_4 = \overline{ON}$  дуга.

Начальные условия согласно теории Кирхгофа и работе (3) зададим в форме:  $E|_{t=0} = U_0(x, y) = A\zeta^\lambda x_4^\nu$ ,  $\frac{\partial E}{\partial t}|_{t=0} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial E}{\partial \zeta} = \frac{A\lambda}{c_0} \zeta^{\lambda-1} x_4^\nu$ , где

$\lambda, \nu, A$  — постоянные числа, а  $c_0$  — начальная скорость волны, причем для  $\zeta < 0, x_4 < 0$ , впереди волны и на экране начальные условия нулевые. Отметим, что значения  $\lambda=0, \nu=0$  соответствуют скачкообразной

волне. Согласно работе (3)  $E = A\lambda c_0^{-\lambda} \sqrt{2 \left| \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \beta} \right|} \iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{\varphi}} x_4^\nu \zeta^{\lambda-1} d\zeta dx_4$ , где

$\varphi = c_0(t - t_φ) - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)(x_4 - s)^2 - \zeta$ ,  $\Sigma$  — площадь, ограниченная линия-

ми  $\zeta=0$  и квазиокружностью, которая получается из пересечения характеристического коноида, проведенного через точку  $(x, y, t)$  (проекцией которой является точка  $M$ ) с плоскостью  $t=0$ .  $k_1, k_2$  — соответственно кривизны квазиокружности и начальной волны,  $s$  — значение  $x_4$  для точки  $M$ ,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\tau', \beta)$  — поле лучей, проходящих через точку  $M$  (4).

Используя соотношение, полученное в (3) (с. 254, формула (5.5)), и принцип взаимности фундаментальных решений (4)  $c_0 |\partial \mathbf{r}' / \partial \beta| =$

$=c_n/H_2$ ,  $H_2 = \left| \frac{\partial r}{\partial \theta} \right|$  — коэффициент Ламе для точечной волны,  $\theta$  — угол

наклона лучей точечной волны  $t = \tau$  к оси  $x_4$  (<sup>5</sup>), можно показать, что  $(k_1 - k_2)s = \vartheta_0 - \vartheta$ . Вычисляя выражение  $E$  при  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$  и делая преобразование Лапласа по  $t - \tau$ , можно получить решение для периодической во времени волны в форме:  $E = \frac{A_1}{2\omega} [(1 - C - S) + i(C - S)]$ ,

$A_1 = 1/\sqrt{S}\sqrt{\epsilon_0}$ ,  $\xi = \frac{\sqrt{\omega}}{K}$ ,  $K = \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0} \int \sqrt{2c_0(k_1 - k_2)}$ ,  $S(\xi)$ ,  $C(\xi)$  — интегралы Френеля.

Институт механики  
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅՎ, Գ. Ս. ԲԵԶԻՐԳԵՆՅԱՆ

Անհամասեռ, խորանարդ աստիճանով ոչ գծային միջավայրում ինտենսիվ լույսային ալիքների դիֆրակցիան

Դիտարկվում են մի քանի խնդիրներ նեղ փնջերի համադրեցության և հզոր, բարձր հաճախականության լույսային ալիքների դիֆրակցիայի մասին:

Ոչ գծային միջավայրում երկու ալիքների համար ստացված են կապված հավասարումներ կոմպլեքս ամպլիտուդաների համար: Հարթ և առանցքասիմետրիկ փնջերի իրական ամպլիտուդաների և ֆազաների համար ստացված է հավասարումների սխեմա: Ցույց է տրված, որ երբ դիֆրակտականության թափանցելիության ոչ գծային մասը կոմպլեքս մեծություն է, ստացված հավասարումների սխեման ունի գառայան փնջերի տեսքի ճշգրիտ լուծում միայն առանձգասիմետրիկ փնջերի համար: Բարձր հաճախականության ալիքների համար ինչպես դիսպացիան, այնպես էլ փնջերի փոխադրեցությունը էապես ազդում են ֆոկուսացման վրա:

Դիտարկված է նաև անհամասեռ ոչ գծային միջավայրում դիֆրակցիայի խնդիրը կիսաանվերջ, կամայական տեսքի էկրանի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> С. А. Ахманов, Р. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, т. 93, вып. 1 (1967).  
<sup>2</sup> В. Н. Бабич, Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук, т. 6, № 246, вып. 32 (1958). <sup>3</sup> Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., 1964. <sup>4</sup> А. Г. Багдоев, Распространение волн в сплошных средах, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1981.