ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 1

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Талалян

О функциях с произвольно малыми периодами на топологических группах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 15/IV 1983)

Известно, что заданная на всей действительной оси конечная измеримая функция, имеющая произвольно малые периоды, постоянна почти всюду. В настоящей заметке мы переносим этот результат на локально компактные группы.

Ниже всюду G—локально компактная группа, e—единица группы G, N—база окрестностей e и F—некоторое семейство замкнутых нормальных подгрупп группы G, обладающее следующим свойством: для любого $V\in N$ существует $H\in F$ такой, что $VH\in G$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть φ—действительная борелевская функция на G. Если φ H-периодична* для любого $H\in F$, то φ постоянна локально почти всюду относительно меры Хаара группы G.*

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Для любого $W\in N$ существует сеть H_α в F такая, что*

$$WH_\alpha=G \text{ при любом } \alpha \tag{1}$$

и

$$\lim H_\alpha=G, \tag{2}$$

где равенство (2) понимается в смысле топологии Хаусфорда для замкнутых подгрупп группы G.

Доказательство. Пусть N_G есть база окрестностей точки G в пространстве замкнутых подгрупп, направленная по включению. Каждый элемент $\alpha\in N_G$ задается конечным семейством F_α непустых открытых подмножеств G. Для каждого $U\in F_\alpha$ возьмем непустое компактное множество $K_U\subset U$ и $V_U\in N$ так, чтобы $V_UK_U\subset U$. Далее пусть V—симметричная окрестность e, содержащаяся в пересечении $W\cap[\cap V_U: U\in F_\alpha]$. В качестве H_α возьмем такую подгруппу из F, чтобы имело место $VH_\alpha=G$.

Очевидно, построенная сеть H_α удовлетворяет условию (1). Условие (2) следует из того, что при любом $\alpha\in N_G$ имеем $H_\alpha\in\alpha$. Действительно, из равенства $VH_\alpha=G$ имеем $VH_\alpha\cap K_U\neq\varnothing$, откуда $H_\alpha\cap$

* Функция на G называется H-периодической, если она постоянна на классах смежности по H.

$\bigcap U \neq \varnothing$, для каждого $U \in F_\alpha$. Таким образом $H_\alpha \in \mathfrak{a}$, что и требовалось.

Обозначим через $C(G)$ семейство всех непрерывных на G действительных функций с компактным носителем, а через $C(G)^+$—семейство всех положительных функций из $C(G)$.

Лемма 2. *Пусть W—окрестность e с компактным замыканием и H_α—сеть в F, соответствующая W согласно лемме 1. Тогда левые меры Хаара μ на G и μ_α на H_α для любого $\alpha \in N_G$ можно выбрать так, чтобы для любого $f \in C(G)$ равномерно относительно $g \in G$ имело место*

$$\lim \int_{H_\alpha} f(gt)\,d\mu_\alpha(t) = \int_G f\,d\mu. \tag{3}$$

Доказательство. Выберем μ и μ_α так, чтобы для любого $f \in C(G)$ имело место (см. приложение к [1])

$$\lim \int_{H_\alpha} f\,d\mu_\alpha = \int_G f\,d\mu \tag{4}$$

Так как $WH_\alpha = G$, то $\int_{H_\alpha} f(gt)\,d\mu_\alpha(t) = \int_{H_\alpha} f(wht)\,d\mu_\alpha(t) = \int_{H_\alpha} f(wt)\,d\mu_\alpha(t)$, где $h \in H_\alpha$, $w \in W$. Поэтому достаточно доказать, что равномерно относительно $w \in W$ имеет место

$$\lim \int_{H_\alpha} f(wt)\,d\mu_\alpha(t) = \int_G f\,d\mu. \tag{5}$$

В силу (4) равенство (5) выполняется в любой точке $w \in \overline{W}$. Так как по условию $\overline{W}$ компактно, то для равномерного выполнения (5) достаточна равностепенная непрерывность на $\overline{W}$ семейства функций $\int_{H_\alpha} f(wt)\,d\mu_\alpha(t)$, $\alpha \in N_G$.

Пусть $w_0 \in \overline{W}$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем открытое множество W_0, содержащее носитель функции $f(w_0 t)$ и имеющее компактное замыкание. Тогда (приложение к [1]) существует число $a > 0$, зависящее только от W_0 такое, что

$$\mu_\alpha(\overline{W}_0 \cap H_\alpha) \leqslant a \text{ для любого } \alpha. \tag{6}$$

Пусть V—окрестность точки w_0 такая, что для любого $w \in V$ носитель функции $f(wt)$ содержится в W_0 и $\sup\{|f(wt) - f(w_0 t)| : t \in G\} < \varepsilon/a$. Тогда если $w \in V$, то для любого α в силу (6) имеем

$$\left|\int_{H_\alpha} f(wt)\,d\mu_\alpha(t) - \int_{H_\alpha} f(w_0 t)\,d\mu_\alpha(t)\right| \leqslant \int_{H_\alpha} |f(wt) - f(w_0 t)|\,d\mu_\alpha(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{a}\cdot \mu_\alpha(\overline{W}_0 \cap H_\alpha) \leqslant \varepsilon.$$

Этим доказана требуемая равностепенная непрерывность, а с нею и лемма 2.

Пусть μ, μ_α, H_α—те же, что в лемме 2. Для любого α левую меру Хаара λ_α на фактор-группе G/H_α выберем так ([2], 28.54), чтобы

$$\int_{G/H_\alpha} d\lambda_\alpha \int_{H_\alpha} f(gt)\,d\mu_\alpha(t) = \int_G f\,d\mu, \quad f \in L^1(G). \tag{7}$$

Тогда для мер λ_α справедлива следующая

Лемма 3. *Для достаточно больших α имеет место неравенство*

$$\lambda_\alpha(G/H_\alpha)<2. \tag{8}$$

Доказательство. Возьмем функцию $f\in C(G)^+$ такую, что $\int\limits_G f d\mu>0$. Тогда в силу леммы 2 начиная с некоторого α' выполняется неравенство

$$\int\limits_{H_\alpha} f(gt)d\mu_\alpha(t)>\frac{1}{2}\int\limits_G fd\mu \quad g\in G. \tag{9}$$

Из (7) и (9) имеем $\int\limits_G fd\mu>\lambda_\alpha(G/H_\alpha)\cdot\frac{1}{2}\int\limits_G fd\mu$, откуда следует (8).

Лемма 4. *Пусть φ—ограниченная положительная борелевская функция на G такая, что для любых $s\in G$ и $f\in C(G)^+$ имеет место*

$$\int\limits_G \varphi(t)f(t)d\mu(t)=\int\limits_G\varphi(t)f(st)d\mu(t). \tag{10}$$

Тогда φ постоянна, μ—локально почти всюду.

Доказательство. Предположим обратное. Тогда существуют два измеримых множества A и B с конечными положительными мерами и действительные числа ξ и η такие, что $\xi<\eta$ и

$$\varphi(x)<\xi \text{ при } x\in A,\ \varphi(x)>\eta \text{ при } x\in B \tag{11}$$

Возьмем $s\in G$ так, чтобы $\mu(A\cap sB)>0$ (([3]), 20.17) и компактное множество $K\subset A\cap sB$, $\mu(K)>0$. Тогда

$$K\subset A,\quad s^{-1}K\subset B. \tag{12}$$

Пусть U—открытое множество такое, что

$$K\subset U,\ \mu(U\setminus K)<\frac{\mu(K)(\eta-\xi)}{\sup\varphi(t)}. \tag{13}$$

Пусть, наконец, f есть функция Урысона для пары (K, U). Тогда в силу (11) и (12) имеем $\int\limits_G\varphi(t)f(t)d\mu(t)<\xi\mu(K)+\sup\varphi(t)\cdot\mu(U\setminus K)$ и $\int\limits_G\varphi(t)f(st)d\mu(t)>\eta\cdot\mu(s^{-1}K)=\eta\cdot\mu(K)$. Из последних двух неравенств в силу (13) получим $\int\limits_G\varphi(t)f(st)d\mu(t)-\int\limits_G\varphi(t)f(t)d\mu(t)>0$, что противоречит (10).

Доказательство теоремы Можно считать, что φ—положительная ограниченная функция, в противном случае мы можем, сохранив условие H-периодичности, перейти к функции $\dfrac{\exp\varphi(t)}{1+\exp\varphi(t)}$. Пусть $f\in C(G)^+$ и $s\in G$. Тогда из (7) в силу H_α-периодичности φ имеем

$$\int\limits_G\varphi(t)f(t)d\mu(t)=\int\limits_{G/H_\alpha}\Big[\int\limits_{H_\alpha}f(gt)d\mu_\alpha(t)\Big]\varphi d\lambda_\alpha \tag{14}$$

и

$$\int\limits_G\varphi(t)f(st)d\mu(t)=\int\limits_{G/H_\alpha}\Big[\int\limits_{H_\alpha}f(sgt)d\mu_\alpha(t)\Big]\varphi d\lambda_\alpha. \tag{15}$$

В силу (3) для достаточно больших α выполняется неравенство

$$\left|\int_{H_\alpha} f(gt)d\mu_\alpha(t)-\int_{H_\alpha} f(sgt)d\mu_\alpha(t)\right|<\varepsilon,\quad g\in G, \tag{16}$$

где $\varepsilon>0$—произвольное заданное число. Из (14), (15), (16) и (8) для достаточно больших α будем иметь

$$\left|\int_G \varphi(t)f(t)d\mu(t)-\int_G\varphi(t)f(st)d\mu(t)\right|\leqslant\int_{G/H_\alpha}\left|\int_{H_\alpha}[f(gt)-f(sgt)]\,d\mu_\alpha(t)\right|\varphi d\lambda_\alpha\leqslant 2\varepsilon\cdot\sup\varphi(t).$$

В силу произвольности ε отсюда получим, что (10) выполняется для любых $s\in G$ и $f\in C(G)^+$. Тогда из леммы 4 следует, что функция φ постоянна μ-локально почти всюду. Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Ց. Ս. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Տոպոլոգիական խմբերի վրա որոշված կամայապես փոքր պարբերություն ունեցող ֆունկցիաների մասին

Ապացուցվում է, որ լոկալ կոմպակտ խմբի վրա տրված որոշակի իմաստով կամայապես փոքր պարբերություն ունեցող բորելյան ֆունկցիան այդ խմբի Հաարի չափի նկատմամբ համարյա ամենուրեք հաստատուն է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. Glimm*, Pacific J. Math., v. 12, № 3 (1962). [2] *Э. Хьюитт, К. Росс*, Абстрактный гармонический анализ, т. 2, Мир, М., 1975. [3] *Э. Хьютит, К. Росс*, Абстрактный гармонический анализ, т. 1, Наука, М., 1975.